Academic Research in Educational Sciences VOLUME 2 | ISSUE 10 | 2021
ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аширмет Бекиевич Бекиев
Каракалпакский государственный университет
ashir1976@mail.ru

Ербосын Есбосинович Ешмуратов
Каракалпакский государственный университет

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается проблема начально-граничная задача для вырождающегося уравнения четвертого порядка.

Ключевые слова: разложимое уравнение типа, единственность решения, доступность, функция Бесселя.

ABSTRACT

In the rectangular domain, a criterion for the uniqueness and existence of a solution of the problem of a fourth-order equation was established.

Keywords: degenerate equation, uniqueness, existence, Bessel functions

ВВЕДЕНИЕ

Исследование краевых задач для уравнений в частных производных высоких порядков играют важную роль, в частности, многие научно-практические исследования приводят к краевым задачам для уравнений в частных производных четвертого порядка. Например, изучение задачи динамики одномерных течений, динамики сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, задачи распространения волн в диспергирующих средах, задачи изгиба тонких пластинок, поперечные колебания стержня и балок и другие, сводятся к решению краевых задач для уравнения четвертого порядка.

ЛИТЕРАТУРНЫЙ АНАЛИЗ И МЕТОДОЛОГИЯ

В работе [1] исследованы краевые задачи четного порядка в прямоугольной области. Для решения рассматриваемых некоторых задач

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

получены априорные оценки. А в работе [3] изучены вопросы классификации и приведения к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области рассмотрены в [2, 5-6, 10] и для вырождающегося уравнения второго порядка с нелокальными и локальными условиями исследованы в [7-9].

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Постановка задачи. В области $\Omega=\{(x,t):0<x<p,\ 0<t<\beta\}$ рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv u_{tt}(x,t)+t^m u_{xxxx}(x,t)+b^2t^m u(x,t)=0, \tag{1}$$

где $m=const>0,\ b=const$.

Задача 1. Найти решение $u(x,t)$ в области Ω уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le p, \tag{2}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u_x(p,t)=0,\ u_{xxx}(0,t)=0,\ u_{xxx}(p,t)=0,\ 0\le t\le\beta. \tag{3}$$

Имеет место следующая теорема.

Единственность и существование решение задачи.

Теорема. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют следующим условиям: $\varphi(x),\psi(x)\in C^{(5)}[0,1]$, $\varphi'(0)=\psi'(0)=0, \varphi'(p)=\psi'(p)=0$, $\varphi'''(0)=\psi'''(0)=0,\ \varphi'''(p)=\psi'''(p)=0$, то существует единственное регулярное решение задачи 1.

Доказательство. Частные решения уравнения (1), не равные нулю в Ω, будем искать в виде $u(x,t)=X(x)T(t)$. Тогда имеем

$$X^{IV}(x)-\lambda^4X(x)=0,\ 0<x<p,\ \lambda=const, \tag{4}$$

$$X'(0)=X'(p)=X'''(0)=X'''(p)=0, \tag{5}$$

$$T''(t)+(\lambda^4+b^2)t^mT(t)=0,\ 0<t<\beta, \tag{6}$$

Задача (4)-(5) имеет решение

$$X_0(x)=\frac{1}{\sqrt{p}},\ X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\cos\lambda_k x,\ \lambda_k=\frac{k\pi}{p},\ k=1,2,\dots. \tag{7}$$

При $k=0$ из (6) имеем

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

$$T_0''(t)+b^2t^mT_0(t)=0. \tag{8}$$

Решение уравнения (8) удовлетворяющие условиям $T_0(0)=\int\limits_0^p \varphi(x)X_0(x)dx=\varphi_0,\ T_0'(0)=\int\limits_0^p \psi(x)X_0(x)dx=\psi_0$ примет вид

$$T_0(t)=\begin{cases}\left[\frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_0}\right)^{\frac{1}{2q}}\psi_0+\pi\varphi_0\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_0}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}ctg\frac{\pi}{2q}\right]J_{\frac{1}{2q}}\left(p_0t^q\right)\sqrt{t}-\\ \quad -\pi\varphi_0\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_0}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_0t^q\right)\sqrt{t}, \qquad b\neq 0,\\ \psi_0t+\varphi_0, \qquad b=0,\end{cases} \tag{9}$$

где $p_0q=b,\ q=\dfrac{m+2}{2}$, $\Gamma(\cdot)$- гамма-функция, $J_\nu(\cdot)$ и $Y_\nu(\cdot)$ функции Бесселя первого и второго рода.

При $k=1,2,...$ из (6) имеем

$$T_k''(t)+\left(\lambda_k^4+b^2\right)t^mT_k(t)=0. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) удовлетворяющие условиям $T_k(0)=\int\limits_0^p \varphi(x)X_k(x)dx=\varphi_k,\ T_k'(0)=\int\limits_0^p \psi(x)X_k(x)dx=\psi_k$ примет вид

$$T_k(t)=\left[\frac{1}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}\psi_k+\pi\varphi_k\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}ctg\frac{\pi}{2q}\right]J_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)\sqrt{t}-$$
$$-\pi\varphi_k\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)\sqrt{t}, \tag{11}$$

где $\left(p_kq\right)^2=\lambda_k^4+b^2$.

Тогда решение задачи (1)-(3) представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}T_k(t)X_k(x), \tag{12}$$

где $T_k(t)$ и $X_k(x)$ определяются из формулы (9), (11) и (7).

Таким образом, мы построили формальное решение задачи (1)-(3) в виде (12).

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

Теперь нам нужно доказать $u(x,t)\in C_{x,t}^{4,2}(\bar{\Omega})$. В области $\bar{\Omega}$ покажем равномерную сходимость рядов

$$\begin{aligned}u_{tt}(x,t)=&-\left\{\frac{\psi_0}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_0}\right)^{\frac{1}{2q}}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_0t^q\right)+\right.\\&\left.+\frac{\varphi_0\pi}{\sin\frac{\pi}{2q}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_0}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_0t^q\right)\right\}\left(p_0q\right)^2t^{2q-\frac{3}{2}}X_0(x)-\\&-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\psi_k}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)+\right.\\&\left.+\frac{\pi\varphi_k}{\sin\frac{\pi}{2q}}\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}J_{-\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)\right\}\left(p_kq\right)^2t^{2q-\frac{3}{2}}X_k(x),\end{aligned}\tag{13}$$

$$\begin{aligned}u_{xxxx}(x,t)=&\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\pi\varphi_k\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}ctg\frac{\pi}{2q}+\frac{\psi_k}{2q}\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{2}{p_k}\right)^{\frac{1}{2q}}\right]\sqrt{t}J_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)-\right.\\&\left.-\varphi_k\pi\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2q}\right)\left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}}\sqrt{t}Y_{\frac{1}{2q}}\left(p_kt^q\right)\right\}\lambda_k^4X_k(x).\end{aligned}\tag{14}$$

Пусть $0\le t\le\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Используем асимптотические формулы для функций Бесселя в окрестности $t=0$ [4]

$$J_\nu(x)\approx\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}$$

оценим функции, определенным равенством (13)

$$\left|u_{tt}(x,t)\right|\le C_1+C_2\sum_{k=1}^{\infty}p_k^2\left(\left|\psi_k\right|+\left|\varphi_k\right|\right)\le C_1+C_3\sum_{k=1}^{\infty}k^4\left(\left|\psi_k\right|+\left|\varphi_k\right|\right).\tag{15}$$

Пусть $0<\varepsilon\le t\le\beta$. Тогда на основании поведения функция Бесселя в бесконечности [4]

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

$$J_v(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi v}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

оценим функции (13)

$$\left|u_{tt}(x,t)\right| \le C_1 + C_4 \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \left\{ |\psi_k| p_k^{-\frac{1}{2}-\frac{2}{2q}} + |\varphi_k| p_k^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2q}} \right\} \le C_1 + C_5 \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \left(|\psi_k| + |\varphi_k|\right). \tag{16}$$

Функций $\varphi(x), \psi(x)$ разлагаются в ортонормированный ряд

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \psi(x) = \psi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x),$$

где коэффициенты $\varphi_0, \varphi_n, \psi_0, \psi_n$ вычисляются по формулам

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) X_0(x) dx, \ \varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) X_k(x) dx, \tag{17}$$

$$\psi_0 = \int_0^1 \psi(x) X_0(x) dx, \ \psi_k = \int_0^1 \psi(x) X_k(x) dx. \tag{18}$$

Интегрируя по частям, пять раз второй интегралы в (17), (18) получаем:

$$\varphi_k = -\frac{1}{\lambda_k^5} \bar{\varphi}_k^{(5)}, \ \psi_k = -\frac{1}{\lambda_k^5} \bar{\psi}_k^{(5)}$$

где

$$\bar{\varphi}_k^{(5)} = \int_0^p \varphi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx, \ \bar{\psi}_k^{(5)} = \int_0^1 \psi^{(5)}(x) \sin \lambda_n x dx.$$

Если значения φ_k, ψ_k подставить в (15) и (16), то нетрудно видеть, что эти ряды сходятся абсолютно в области $\bar{\Omega}$. Тогда на основании признака Вейерштрасса ряды в (13) сходятся абсолютно и равномерно в области $\bar{\Omega}$. Из сходимости рядов (13) следует сходимость (14). Единственность решения задачи следует из представления (12), а также из полноты системы (9). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе исследовано начально-граничная задача для уравнения четвертого порядка в прямоугольной области. Решение показано в виде функции Бесселя. В зависимости от функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ показано сходимости полученных решений.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-10-745-750

REFERENCES

1. Аманов Д. (2019). *Разрешимость и спектральные свойства краевых задач для уравнений четного порядка*. Автореф. дис. … докт. физ. – мат. наук. – Ташкент: АН РУз.
2. Амиров Ш., Кожанов А. И. (2016). Глобальная разрешимость начально-краевых задач для некоторых нелинейных аналогов уравнения Буссинеска // Матем. заметки, (2) 99, выпуск 2, С. 171-180
3. Джураев Т.Д., Сопуев А. (2000). *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*. –Ташкент: Фан.
4. Дунаев А.С., Шлычков В.И. (2015). *Специальные функции*. Екатеринбург.
5. Мегралиев Я.Т., Ализаде Ф.Х. (2016). Обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода. *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика.Компьютерные науки*. Т.26. Вып.4. 503-514.
6. Отарова Ж.А., Бекиев А.Б. (2014). Краевая задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области. *Третий международный Российско-казахский симпозиум «Уравнение смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». Терскол.158-160.*
7. Сабитова Ю.К. (2009). Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения. *Известия вузов. Математика*. 12, 49-58.
8. Сабитов К.Б., Сидоров С.Н. (2017). Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа // Итоги науки и техники. *Современная математика и приложения. Тематические обзоры*. Том 137. 26-60.
9. Сидоров С.Н. (2015). Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа со степенным вырождением. *Известия вузов. Математика*. 12, 55-65.
10. Юлдашев Т.К. (2016). Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка. *Известия Института математики и информатики УдГУ*. Вып. 1(47). 119-128.