ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-305-308

TENGSIZLIKLARNI ISBOTLASHDA MONOTON KETMA-KETLIKLAR USULI

Nilufarxon Ibroximjon qizi Ismoilova
Andijon qishloq xo'jaligi va agrotexnologiyalar instituti assistenti

ANNOTATSIYA

Ma'ruzada o'rta maktab o'quvchilari o'rtasida o'tkaziladigan matematika fan olimpiadalarida tez-tez uchrab turadigan tengsizliklarni isbotlashning monoton ketma-ketliklarga asoslangan bir usuli keltirilgan. Unda monoton ketma-ketliklar usullari va teoremalari isbotlari bilan berilgan.

Kalit so'zlar: monoton juftliklar, monoton uchliklar, monoton ketma-ketliklar, determinantlar.

ABSTRACT

This article presents a method for the proof of inequalities based on monotonic sequences that are often found in school math competitions.

Keywords: monotone pairs, monotonous trinities, monotonous sequences, determinants.

KIRISH

Monoton juftliklar usuli. Dastlab ikkita a_1, a_2 va b_1, b_2 juftliklardan tashkil topgan $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ jadvalni tuzamiz.

Ta'rif. Agar bir vaqtda $a_1 \geq a_2$ va $b_1 \geq b_2$ yoki $a_1 \leq a_2$ va $b_1 \leq b_2$ tengsizliklar bajarilsa, u holda (a_1, a_2) va (b_1, b_2) bir xil monoton juftliklar deyiladi. Skalyar ko'paytma kabi quyidagicha

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad (1)$$

belgilash kiritamiz, ya'ni kiritilgan jadvalning son qiymati sifatida, uning ustunlaridagi elementlarini ko'paytirib yig'indisini olamiz.

METODOLOGIYA

1-teorema. Agar a_1, a_2 va b_1, b_2 bir xil monoton juftliklar bo'lsa, u holda

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-305-308

bo‘ladi.

Isboti. Haqiqatan ham (1) ga ko‘ra

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1) = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$$

Teorema shartiga ko‘ra a_1, a_2 va b_1, b_2 bir xil monoton juftliklar. Shuning uchun

$a_1 - a_2 \ va \ b_1 - b_2$ ayirmalar bir xil ishorali bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

NATIJALAR

Ixtiyoriy a, b musbat va m, n natural sonlar uchun (a^m, b^m) va (a^n, b^n) bir xil monoton juftliklar bo‘ladi va isbotlangan teoremadan

$$a^{m+n} + b^{m+n} \geq a^m b^n + a^n b^m$$

tengsizlik o‘rinli ekanligi kelib chiqadi. Misollar yechishdan namunalar keltiramiz.

1-misol. Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \leq \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}} \ , \quad a > 0, b > 0;$$

Yechilishi. (1) ga asosan

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} \\ \frac{1}{a^3\sqrt{a}} & \frac{1}{b^3\sqrt{b}} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{a^3}\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{1}{b^3}\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \sqrt{b} \\ \frac{1}{b^3\sqrt{b}} & \frac{1}{a^3\sqrt{a}} \end{pmatrix},$$

munosabatlar o‘rinli hamda $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ va $(\frac{1}{b^3\sqrt{b}}, \frac{1}{a^3\sqrt{a}})$ bir xil monoton juftliklar bo‘lgani uchun 1-teoremadan isbotlanishi talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi.

MUHOKAMA

Monoton uchliklar usuli

uchta sondan tashkil topgan $(a_1, \ a_2, a_3)$va (b_1, b_2, b_3) uchliklar uchun

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

jadvalni qaraymiz. Agar jadvalning birinchi ustunida bu uchliklardagi eng katta sonlar, ikkinchi ustunida kattaligi jihatidan ikkinchi o‘rinda turgan sonlar va nihoyat uchinchi ustunida eng kichik sonlar joylashsa $(a_1, \ a_2, \ a_3)$va (b_1, b_2, b_3) uchliklarga bir xil monoton uchliklar deyiladi. Bu jadval uchun quyidagicha

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-305-308

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

belgilash kiritamiz.

2-teorema. Agar $(a_{1\,,}\ a_2, a_3)$va (b_1, b_2, b_3) bir xil monoton uchliklar bo‘lib, (b_1', b_2', b_3') uchlik b_1, b_2, b_3 sonlarining ixtiyoriy o‘rin almashtirishlaridan hosil qilingan uchlik bo‘lsa u holda

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

Isboti. Ma’lumki, 3 ta elementdan hammasi bo‘lib 6 ta o‘rin almashtirishlar bajarish mumkin. Teoremani isbotlash uchun $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix}$ ko‘rinishdagi 6 xil sonlardan eng kattasi $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ ekanligini ko‘rsatishimiz kifoya.

Agar (b_1', b_2', b_3') uchlik (b_1, b_2, b_3) uchlikdan farq qilsa, u holda shunday k, l $(1 < k < l < 3)$ sonlar jufti topiladiki, bunda (a_k, a_l) va (b_k', b_l') bir xil monoton juftliklar bo‘ladi. Demak, $b_k'va\ b_l'$ solarining o‘rinlarini almashtirish natijasida $\begin{pmatrix} a_k & a_l \\ b_k' & b_l' \end{pmatrix}$ ning o‘z navbatida $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1' & b_2' & b_3' \end{pmatrix}$ ning qiymatini orttirilishini amalga oshirish mumkin. Teorema isbotlandi.

XULOSA

Endi isbotlangan teoremani qo‘llab tengsizliklarni isbotlashga doir misollardan na’munalar keltiramiz.

2-misol. $a > 0, b > 0, c > 0$ bo‘lganda quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Yechilishi. Bu munosabatdan isbotlanishi talab qilingan tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizliklarni isbotlashda $(a, b, c), \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right)$ uchliklarning bir xil monoton uchliklar ekanligidan foydalandik.

REFERENCES

1. Э. Беккенбах, Р. Белман. Неравенство. Москва, Мир, 1965,276стр.
2. G’. Mo‘minov, T. Ibaydulayev. Differensial va integral tengsizliklar. O‘UM, ADU nashriyoti 2016.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-305-308

3. O.Bottema, Inequalities for R, r and s,Univ. Beograd.Publ.Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 338-352(1971)27-36.
4. J.Garfunkel, Problem 825, Crux Math., 9(1983), 79.