Academic Research in Educational Sciences VOLUME 2 | ISSUE 11 | 2021
ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ОКУРЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

Хайрулла Киличевич Каршибоев
к.ф-м.н.,заведуюший кафедры "Высшей математики" Самаркандского института экономики и сервиса
karshiboyev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этом исследовании было исследовано однопараметрическое семейство круговых гомеоморфизмов с единственными точками излома, причем число витков является рациональным, а число циклических траекторий не превышает двух.

Ключевые слова: гомеоморфизмов окружности, ренормализация, число вращения.

ON A FAMILY OF CIRCLE MAPPINGS WITH ONE BREAK POINT

ABSTRACT

In this article, we study a one-parameter family of circle homeomorphisms with one break point. It is proved that in the case of a rational rotation number the number of periodic trajectories does not exceed two.

Key words: circle homeomorphism, renormalization, rotation number.

ВВЕДЕНИЕ

Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории нелинейных систем.

Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А.Пуанкаре в связи с задачами небесной механики.

Классическая теорема Данжуа утверждает, что диффеоморфизм окружности из класса $C^2(S^1)$ топологически сопряжен с линейным поворотом T_ρ, т.е. существует гомеоморфизм φ такой, что $\varphi \circ T_f = T_\rho \circ \varphi$. В теории одномерных отображений центральной является проблема гладкости сопряжения φ. Для диффеоморфизмов окружности эта проблема была решена в определенном смысле полностью в конце 1980 –ых годов в работах Синая и

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

Ханина, Кацнельсона и Орнстейна. При этом существенно использовался метод ренормализационной группы (РГ).

В теории динамических систем метод РГ впервые был использован М.Фейгенбаумом в 1978 году, для построения теории универсальности. Этот метод с успехом применяется для изучения гомеоморфизмов окружности. Синай и Ханин доказали, что ренормализации диффеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1), \varepsilon > 0$, с иррациональным числом вращения, аппроксимируются (в C^2-норме) линейными отображениями.

Важным классом отображений с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. Поведения ренормализаций для гомеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения изучались Вул и Ханиным. Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений единичной окружности[1], [4]:

$$T_\Omega x = \{f(x,\Omega)\}, \quad x \in S^1 = [0,1), \ \Omega \in [0;1]$$

где скобка $\{\cdot\}$ - обозначает дробную часть числа, а $f(x,\Omega)$-удовлетворяет следующим условиям:

$a)$ при фиксированном Ω, $f(x;\Omega)$ -непрерывная монотонно возрастающая функция;

$b)$ $f(0;0) = 0, \ f(x+1;\Omega) = f(x;\Omega)+1,$ для любого $x \in R^1$;

$c)$ $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial \Omega} > const > 0;$

$d)$ $t_0 : [0;1] \to [0;1]$ непрерывная кривая;

$e)$ при каждом фиксированном $\Omega \in [0;1]$, $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial x} > const > 0;$ для $\forall x \in S^1 \setminus \{t_0(\Omega)\}$, $f(x;\Omega) \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{t_0(\Omega)\})$, при некотором $\varepsilon > 0$ и

$$\frac{f'_-(t_0(\Omega),\Omega)}{f'_+(t_0(\Omega),\Omega)} = c(\Omega) \neq 1.$$

МЕТОДОЛОГИЯ

В данной статья изучено однопараметрическое семейство гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома[1-3]. Доказано, что в

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

случае рационального числа вращения число периодических траекторий не превышает двух.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Научная статья носит теоретический характер. Полученные результаты и методы используемые в на работы могут быть использованы при исследованиях в нелинейном анализе, гидродинамике и теории универсальности.

Рассмотрим однопараметрическое семейство отображений единичной окружности [1], [4]:

$$T_{\Omega}x=\{f(x,\Omega)\}, \quad x\in S^1=[0,1), \ \Omega\in[0;1]$$

где скобка $\{\cdot\}$ - обозначает дробную часть числа, а $f(x,\Omega)$-удовлетворяет следующим условиям:

$a)$ при фиксированном Ω, $f(x;\Omega)$ -непрерывная монотонно возрастающая функция;

$b)$ $f(0;0)=0$, $f(x+1;\Omega)=f(x;\Omega)+1$, для любого $x\in R^1$;

$c)$ $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial\Omega}>const>0;$

$d)$ $t_0:[0;1]\to[0;1]$ непрерывная кривая;

$e)$ при каждом фиксированном $\Omega\in[0;1]$, $\dfrac{\partial f(x;\Omega)}{\partial x}>const>0;$ для $\forall x\in S^1\setminus\{t_0(\Omega)\}$, $f(x;\Omega)\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{t_0(\Omega)\})$, при некотором $\varepsilon>0$ и

$$\frac{f_-^{'}(t_0(\Omega),\Omega)}{f_+^{'}(t_0(\Omega),\Omega)}=c(\Omega)\neq 1.$$

Обозначим ρ_{Ω} число вращений, отвечающее $T_{f_{\Omega}}$ [2-4]:

$$\rho_{\Omega}=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(x,\Omega)}{n}$$

Из условий $d)-e)$ вытекает, что $T_{\Omega}x$ при каждом фиксированном значении параметра имеет только одну точку излома $t_0(\Omega)$. Число $c(\Omega)$ называется величиной излома T_{Ω}.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

Всюду в дальнейшем мы будем обозначать через $f^{(n)} - n$-ую суперпозицию функции f. Легко видеть, что ρ_Ω монотонно (не строго) зависит от параметра Ω. Заметим, что каждому рациональному $\rho = \frac{p}{q}$ отвечают невырожденный отрезок (значений Ω таких, что $\rho_\Omega = \frac{p}{q}$, в том время как иррациональному ρ отвечает единственно Ω).

Пусть $A = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right) \subset (0,1)$ - интервал Фария $n -$го уровня [1], [4]:

1) $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$
2) Все рациональные числа внутри интервала A имеют вид $\frac{kp_1 + lp_2}{kq_1 + lq_2}$.

Рациональное число с минимальным знаменателем равно $\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}$.

Выберем произвольную точку x_0 на окружности и отрезок траектории этой точки $\{x_i = T_\Omega^i x_0, 0 \le i < q_1 + q_2\}$. Обозначим $\Delta_0^{(1)}$ и $\Delta_0^{(2)}$ отрезки $[x_0, x_{q_1}]$ и $[x_{q_2}, x_0]$, соответственно. Обозначим также образы этих отрезков под действием T_Ω через $\Delta_i^{(1)}$ и $\Delta_j^{(2)}$ [4]:

$$\Delta_i^{(1)} = T^i \Delta_0^{(1)}, \quad \Delta_j^{(2)} = T^i \Delta_0^{(2)} \quad .$$

Следующее утверждение было доказано в [4] и в нашей ситуации работает без каких-либо изменений.

Лемма 1. Предположим $\rho(T) \in \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$. Отрезок траектории $\{x_i = T_\Omega^i x_0, 0 \le i < q_1 + q_2\}$разбивает окружность на непересекающиеся отрезки $\Delta_i^{(1)},\ 0 \le i < q_2$ и $\Delta_j^{(2)},\ 0 \le j < q_1$.

Обозначим построенное разбиение $\xi(A, x_0)$. Положим $\upsilon = \upsilon ar_{S^1} \ln f' < \infty, \bar{\upsilon} = \upsilon + |\ln f'(x_0 - 0) + \ln f'(x_0 + 0)|$,

Academic Research in Educational Sciences VOLUME 2 | ISSUE 11 | 2021
ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

$q = \max(q_1, q_2)$, $p = \max(p_1, p_2)$. Рассмотрим произвольную траекторию $y_i = T_\Omega^i y_0$, $y_0 \in S^1$, такую, что $y_i \neq x_0 = 0$, $0 \le i < q_2$.

Лемма 2. Предположим $\rho(T) \in \left(\frac{p_1 + p_2}{q_1 + q_2}, \frac{p}{q} \right)$ или $\rho(T) = \left(\frac{p}{q} \right)$. Тогда

$$e^{-\bar{\upsilon}} \le \prod_{i=0}^{q-1} f'(y_i) \le e^{\bar{\upsilon}}.$$

Пусть $A_n = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \right)$- интервал Фарея $n-$го ранга [1], а $A_m, m < n$- некоторой интервал Фарея ранга m, содержащий A_n. Пусть $\rho(T) \in A_n$. Выберем Δ_n - произвольным элемент разбиения $\xi(A_m, t_0)$, содержащий Δ_n. Обозначим через $|\Delta|$.

Лемма 3. Положим $\lambda = (1 + e^{-\bar{\upsilon}})^{-\frac{1}{2}} < 1$.

$$|\Delta_n| \le const \lambda^{n-m} |\Delta_m|, \quad |\Delta_n| \le const \lambda^n.$$

Пусть разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид $\rho(f(x, \Omega)) = \frac{p}{q} = [k_1, k_2, ..., k_n], k_n \ge 2.$

Обозначим $I(\frac{p}{q})$ отрезок значения параметра Ω таких, что $\rho(\Omega) = \frac{p}{q}$. Зафиксируем некоторой $\Omega \in I(\frac{p}{q})$ и обозначим $f = f_\Omega$, $T_f = T_{f_\Omega}$. Для рационального числа вращения $\rho = \frac{p}{q}$ всегда существует по крайней мере одна периодическая траектория периода q. Пусть $\{y^{(i)}, 0 \le i \le q-1\}$ произвольная периодическая траектория. Обозначим $[y_1, y_2]$ отрезок, образованный траекторий $\{y^{(i)}, 0 \le i \le q-1\}$ и содержащий особую точку t_0. Перейдем к перенормированным координатам:

$$x = y_2 + (y_1 - y_2) z$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

и определим функцию, отвечающую T_f^q в перенормированной системе координат:

$$\overline{f}(z) = \frac{1}{y_1 - y_2}[T_f^q(y_2 + (y_1 - y_2 z)) - y_2],\ z \in [0,1].$$

Обозначим d перенормированную координату точки t_0:

$$d = (t_0 - y_2)/(y_1 - y_2)$$

и определим функцию $F_d(z),\ z \in [0,1]$:

$$F_d(z) = \begin{cases} \dfrac{zc}{d(1-c^2) + c^2 + z(c-1)}, & z \in [0, d] \\ \dfrac{d(1-c^2) + zc^2}{d(1-c^2) + c + zc(c-1)}, & z \in [d, 1] \end{cases}$$

Теорема 1. Существует константа $c_3 > 0$ такая, что

$$\left\| \overline{f}(z) - F_d(z) \right\|_{C^2([0,]\setminus\{d\})} \le c_3 \lambda^{n\varepsilon}. \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение окружности, порождённое траекторией $(y^{(i)}, 0 \le i \le q-1)$. Обозначим $\Delta_0 = [y_1, y_2],\ \Delta_i = T_\theta^i \Delta_0, 1 \le i \le q-1$. Очевидно $T_\theta^q \Delta_0 = \Delta_0$. Не трудно показать [1], что $|\Delta_i| \le const\, \lambda^n, 1 \le i \le q-1$. Функцию $\overline{f}(z)$ можно представить как суперпозицию двух функций f_1 и f_2, отвечающих отображениям $T_\theta : \Delta_0 \to \Delta_1, T_\theta^{q-1} : \Delta_1 \to \Delta_q = \Delta_0$. Определим относительные координаты внутри отрезков Δ_i:

$$x = T_f^i y_2 + (T_f^i y_1 - T_f^i y_2) z.$$

Тогда функции f_1 и f_2 можно записать в виде:

$$f_1(z_0) = \frac{1}{(T_\theta y_1 - T_\theta y_2)}[T_\theta(y_2 + (y_1 - y_2) z_0) - T_\theta y_2]$$

$$f_2(z_1) = \frac{1}{y_1 - y_2}[T_\theta^{q-1}(T_\theta y_2 + (T_\theta y_1 - T_\theta y_2) z_1) - y_2]$$

При этом

$$\overline{f}(z) = f_2(f_1(z)). \qquad (2)$$

В работе [1] доказано

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

$$\left\| f_2(z_1) - \frac{Mz_1}{1+z_1(M-1)} \right\|_{C^2([0,1])} \leq const\ \lambda^{n\varepsilon} \qquad (3)$$

где

$$\ln M = \sum_{i=1}^{q-1} \int_{\Delta_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy = \left(\sum_{i=0}^{q-1} \int_{\Delta_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \right) - \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy = \ln c - \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \qquad (4)$$

Поскольку $\left| \int_{\Delta_0} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy \right| \leq const\ \lambda^n$, получаем

$$\left\| f_2(z_1) - \frac{cz_1}{1+z_1(c-1)} \right\|_{C^2([0,1])} \leq const\ \lambda^{n\varepsilon} \qquad (5)$$

Легко видеть, что функция $f_1(z_0)$ близка к кусочно-линейной функция $f_d(z_0)$, где

$$f_d(z_0) = \begin{cases} \dfrac{z_0}{c^2(1-d)+d}, & z_0 \in [0, d] \\ \dfrac{d(1-c^2)+z_0c^2}{c^2(1-d)+d}, & z_0 \in [d, 1] \end{cases} \qquad (6)$$

Поскольку $|\Delta_0| \leq const\ \lambda^n$ справедлива оценка:

Используя (2)-(6) получаем (1).

Из теоремы 1 вытекает выпуклость $\overline{f}(z)$ при $0 < c < 1$ и вогнутость при $c > 1$. Действительно, прямым вычислением легко убедится, что

$$\frac{d^2}{dz^2} F_d(z) \geq 2c^2(1-c), \ z \neq d \quad \text{при } 0 < c < 1$$

$$\frac{d^2}{dz^2} F_d(z) \leq -\frac{2}{c^3}(c-1), \ z \neq d \quad \text{при } c > 1.$$

Положим

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon \ln \lambda} \ln\left(\frac{1}{c^3} |c-1| \min\left(\frac{1}{c^3}, c^2\right)\right) \right].$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-833-840

Обозначим интервал $I(\frac{p}{q})=\left[\Omega_1(\frac{p}{q}),\Omega_2(\frac{p}{q})\right]$. Положим $J=[0,1]\setminus\bigcup_{0\le\frac{p}{q}\le 1} I(\frac{p}{q})$. Обозначим меру Лебега на $[0,1]$ через λ.

Теперь сформулируем основные результате нашей работы.

Теорема 2. При всех $n>N$ справедливы следующие утверждения:

(а) если $\Omega=\Omega_1(\frac{p}{q})$ или $\Omega=\Omega_2(\frac{p}{q})$, то T_Ω имеет единственную периодическую траекторию периода q;

(в) при $\Omega\in\left(\Omega_1(\frac{p}{q}),\Omega_2(\frac{p}{q})\right)$ существует равно две периодические траектории периода q.

REFERENCES

1. K.M.Khanin and E.B.Vul. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
2. И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. –М. Наука, 1980.
3. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.
4. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.
5. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.
6. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома// Ж. Функционал анализ и его приложения.-1998.-№32(3).-С.11-21.
7. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Издательская фирма "Физико-математическая литература", 1995.
8. Каршибоев Х.К. Эргодические отображения окружности с одной точкой излома // ДАН. 2009. №2. С.14-18.