ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

ПЕРЕНОРМИРОВАННЫЕ КООРДИНАТЫ ДЛЯ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКУРЖНОСТИ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ ИЗЛОМА

Хайрулла Киличевич Каршибоев
к.ф-м.н.,заведуюший кафедры “Высшей математики”
Самаркандского института экономики и сервиса
karshiboyev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе, найдены соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем показано, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно, где предполагается, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально.

Ключевые слова: гомеоморфизмов окружности, ренормализация, число вращения.

RENORMALIZED COORDINATES FOR HOMEOMORPHISMS OF A CIRCLE WITH ONE BREAK POINT

ABSTRACT

In the present paper, we find the relation between z_i and z_{i+1}, (t_j and t_{j+1}), then it is shown that $z_{q_{n+1}}$ and t_{q_n} are almost linear-fractional functions of z_0 and t_0, respectively, where it is assumed that the defining function $f(x)$ satisfies the conditions $(c_1)-(c_4)$ and the rotation number is $\rho=\rho(T_f)$ irrational.

Keywords: circle homeomorphism, renormalization, rotation number.

ВВЕДЕНИЕ

Теория гомеоморфизмов окружности составляет одно из важных направлений современной теории нелинейных систем.

Впервые гомеоморфизмы окружности изучались А.Пуанкаре в связи с задачами небесной механики.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

Важным классом отображений с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. Поведения ренормализаций для гомеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения изучались Вул и Ханиным. Естественным является изучение поведения ренормализаций гомеоморфизмов окружности с изломами с более низкой гладкостью.

Для гомеоморфизмов окружности с особенностями изучение сходимости последовательности времени попадания является более сложной и интересной задачей.

Все это позволяет заключить, что изучение ренормализаций, а также сходимости времени попадания для гомеоморфизмов с изломами является актуальной задачей современного нелинейного анализа.

МЕТОДОЛОГИЯ

В данной статья изучено найдены соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем показано, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно, где предполагается, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Научная статья носит теоретический характер. Полученные результаты и методы используемые в на работы могут быть использованы при исследованиях в нелинейном анализе, гидродинамике и теории универсальности.

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T_f единичной окружности

$$T_f x = \{f(x)\}, \quad x \in S^1 = [0,1) \tag{1}$$

где скобка $\{\cdot\}$- обозначает дробную часть числа, а $f(x)$-определяющая функция T_f, удовлетворяет следующим условиям:

(c_1) $f(x)$-непрерывная, строго возрастающая функция на R^1;

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

(c_2) $f(x+1)=f(x)+1$ для любого $x\in R^1$;

(c_3) гомеоморфизм $T_f x$ в точке $x=x_b$ имеет излом, т.е. существуют конечные односторонние производные $f'(x_b\pm 0)>0$ и $f'(x_b-0)\neq f'(x_b+0)$;

(c_4) $f'(x)$-абсолютно непрерывная функция на $[x_b, x_b+1]$ и $f''\in L_p(S^1;dl)$ при некотором $p>1$.

Число $\sigma=\sigma_f(x_b)=\dfrac{f'(x_b-0)}{f'(x_b+0)}$ называется величиной излома T_f в точке $x=x_b$. Условие (c_4) называется условием гладкости Кацнельсона и Орнстейна.

Пусть число вращения $\rho=\rho(T_f)$ иррационально и разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид:

$$\rho=[k_1,k_2,...,k_n,...].$$

Положим

$$\frac{p_n}{q_n}=[k_1,k_2,...,k_n],\quad n\geq 1.$$

Числа q_n-удовлетворяют разностному уравнению:

$$q_{n+1}=k_{n+1}q_n+q_{n-1},\quad q_0=1,\ q_1=k_1,\quad n\geq 1.$$

Обозначим особую точку x_b через x_0 и рассмотрим ее итерации, т.е. $x_i=T_f^i x_0,\ i\geq 1$. Обозначим $\Delta_0^{(n)}=\Delta_0^{(n)}(x_0)$-замкнутый отрезок соединяющий точки x_0 и x_{q_n}.

Обозначим через $V_n=V_n(x_0)$ замкнутый интервал соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. Ясно, что $V_n=\Delta_0^{(n)}\bigcup\Delta_0^{(n+1)}$. Интервал V_n-называется n-ой ренормализационной окрестностью точки x_0. Определим отображение Пуанкаре по формуле:

$$\pi_n(x)=\begin{cases}T_f^{q_{n+1}}x, & если\ \ x\in\Delta_0^{(n)}\setminus\{x_0\},\\ T_f^{q_n}x, & если\ \ x\in\Delta_0^{(n+1)}.\end{cases}\qquad (2)$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) нас интересует главным образом поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$, при $n\to\infty$. Поскольку длина отрезка V_n экспоненциально стремится к нулю и $q_n\to+\infty$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

при $n \to \infty$, поведение $\pi_n(x)$ удобно изучить в новых перенормиро-ванных координатах.

Введем перенормированные координаты z на V_n:

$$z = \frac{x - x_0}{x_0 - x_{q_n}}, \quad x \in V_n \tag{3}$$

Обозначим $a_n = \dfrac{x_{q_{n+1}} - x_0}{x_0 - x_{q_n}}$. Очевидно, что $a_n > 0$. При $x \in V_n$, соответствую-щие координаты z принимают значения от -1 до a_n. В новых координатах отображению π_n соответствует следующая пара (f_n, g_n):

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}}, \\ g_n(z) &= \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \end{aligned} \tag{4}$$

Пара функции (f_n, g_n) называется n-ой ренормализацией отображения π_n. Положим $\Delta_i^{(n)} = T_f^i \Delta_0^{(n)}, \ i \geq 1, \ n \geq 1$. Пусть для определенности n-нечетное число, тогда имеет место соотношение $x_{q_{n+1}} \prec x_0 \prec x_{q_n}$.

Система отрезков $\xi_n = \{\Delta_i^{(n+1)}, \ 0 \leq i < q_n; \ \Delta_j^{(n)}, \ 0 \leq j < q_{n+1}\}$ образует разбиение окружности (см. [4]). При этом соседние два отрезки из ξ_n пересекаются одной лишь концевой точкой.

Введем относительные координаты z_i, $0 \leq i \leq q_{n+1}$, внутри отрезков $\Delta_i^{(n)}$ и t_j, $0 \leq j \leq q_n$, внутри отрезков $\Delta_j^{(n+1)}$ по формулам:

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+q_n}}, \quad x \in \Delta_i^{(n)}, \\ t_j &= \frac{x_{q_{n+1}+j} - x}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}, \quad x \in \Delta_j^{(n+1)} \end{aligned} \tag{5}$$

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$z_i = \frac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}, \quad z \in [-1;0]$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

$$t_j = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}, \qquad z \in [0; a_n] \tag{6}$$

Доказательство леммы 1. Лемма 1 доказывается прямым вычислением. Если $x \in \Delta_i^{(n)}$, тогда $T_f^{-i} x \in \Delta_0^{(n)}$. Используя равенство (3) получаем: $T_f^{-i} x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$ и $z \in [-1;0]$. Из этого

$z_i = z_i(z) = \dfrac{x_i - x}{x_i - x_{i+q_n}} = \dfrac{x_i - T_f^i(T_f^{-i} x)}{x_i - x_{i+q_n}} = \dfrac{x_i - T_f^i(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_i - x_{i+q_n}}$; Точно также, если $x \in \Delta_j^{(n+1)}$, тогда $T_f^{-j} x \in \Delta_0^{(n+1)}$ и $T_f^{-j} x = x_0 + z(x_0 - x_{q_{n+1}})$, $z \in [0; a_n]$.

Учитывая это получаем

$$t_j = t_j(z) = \frac{x_{j+q_{n+1}} - x}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(T_f^{-j} x)}{x_{j+q_{n+1}} - x_j} = \frac{x_{j+q_{n+1}} - T_f^j(x_0 + z(x_0 - x_{q_n}))}{x_{j+q_{n+1}} - x_j}.$$

Лемма 1 доказана.

В настоящем работе, мы найдем соотношение между z_i и z_{i+1}, (t_j и t_{j+1}), а затем покажем, что $z_{q_{n+1}}$ и t_{q_n} являются почти дробно-линейными функциями от z_0 и t_0 соответственно. Ниже мы всюду предполагаем, что определяющая функция $f(x)$, удовлетворяет условиям $(c_1)-(c_4)$ и число вращения $\rho = \rho(T_f)$ иррационально.

Введем следующие обозначения:

$\alpha_i = x_{i+q_n}$, $\gamma_i = x_i$, $\beta_i = T_f^i x$, $x \in \Delta_0^{(n)}$. Ясно, что $\beta_i \in [\alpha_i, \gamma_i]$, $0 \le i < q_{n+1}$,

$$A_i = -\frac{\dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\beta_i - \alpha_i)} \displaystyle\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(y - \alpha_i)dy + \dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\gamma_i - \beta_i)} \displaystyle\int_{\beta_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i - y)dy}{1 + \dfrac{1}{f'(\alpha_i)(\gamma_i - \alpha_i)} \displaystyle\int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i - y)dy},$$

$$B_i = \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} \frac{f''(y)}{2f'(y)} dy, \qquad m_{n+1} = \exp\left\{\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} B_i\right\},$$

$$\psi_i = -B_i - \ln\left(\frac{1 + A_i z_i}{1 + A_i(z_i - 1)}\right), \qquad \tau_{n+1}(z_0) = \sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} \psi_i.$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

Теорема 1. Справедливо следующее равенство:

$$z_{q_{n+1}} = \frac{z_0 m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))}{1+z_0(m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))-1)} \qquad (7)$$

Доказательств. Теорема 1 доказывается прямым вычислением. Ясно, что

$$z_i = \frac{\gamma_i-\beta_i}{\gamma_i-\alpha_i}, \qquad z_{i+1} = \frac{\gamma_{i+1}-\beta_{i+1}}{\gamma_{i+1}-\alpha_{i+1}},$$

где

$$\alpha_{i+1} = f(\alpha_i),$$

$$\beta_{i+1} = f(\beta_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\beta_i-\alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(\beta_i-y)dy,$$

$$\gamma_{i+1} = f(\gamma_i) = f(\alpha_i) + f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy.$$

Подставляя в выражение для z_{i+1}, получаем:

$$z_{i+1} = \frac{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy - \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(\beta_i-y)dy}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy} =$$

$$= \frac{\gamma_i-\beta_i}{\gamma_i-\alpha_i}\left(1+\frac{(\beta_i-\alpha_i)\int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy - (\gamma_i-\alpha_i)\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f''(y)(\beta_i-y)dy}{f'(\alpha_i)(\gamma_i-\alpha_i)(\gamma_i-\beta_i) + (\gamma_i-\beta_i) + \int_{\alpha_i}^{\gamma_i} f''(y)(\gamma_i-y)dy}\right) =$$

$$= z_i(1+A_i(z_i-1)).$$

Из это вытекает что

$$\frac{1-z_{i+1}}{z_{i+1}} = \frac{1-z_i-(z_i-1)A_i z_i}{z_i(1+A_i(z_i-1))} = \frac{1-z_i}{z_i}\cdot\frac{1+A_i z_i}{1+A_i(z_i-1)} = \frac{1-z_i}{z_i}\exp(-B_i)\cdot\exp(-\psi_i).$$

Используя это равенство получим:

$$\frac{1-z_{q_{n+1}}}{z_{q_{n+1}}} = \frac{1-z_0}{z_0}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1} B_i\right\}\cdot\exp\left\{-\sum_{i=0}^{q_{n+1}-1}\psi_i\right\} = \frac{1-z_0}{z_0}\cdot\frac{1}{m_{n+1}\exp(\tau_{n+1}(z_0))} \quad (8)$$

Решая уравнение (8) относительно $z_{q_{n+1}}$ получим доказательство теоремы 1.

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-11-841-847

REFERENCES

1. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.
2. И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. –М. Наука, 1980.
3. Katznelson Y., Ornstein D. The differentiability of the conjugation of certain diffeomorphisms of the circle// Ergodic Theory Dynam.Systems.-1989.- № 9(4).-P .643-680.
4. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.
5. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.
6. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома// Ж. Функционал анализ и его приложения.- 1998.-№32(3).-С.11-21.
7. Каршибоев Х.К. Эргодические отображения окружности с одной точкой излома // ДАН. 2009. №2. С.14-18.