

ОИМ-ГОМЕОМОРФИЗМЫ И КВАЗИКОНФОРМНОСТЬ

Азизбек Тоир ўғли Утаев

Ассистент Ташкентского института инженеров ирригации и механизации
сельского хозяйства Каршинский филиал

АННОТАЦИЯ

В этой статье показано, что если ОИМ-гомеоморфное отражение является переносом поля в поле, то это отражение будет квазиконформой и будет определен его коэффициент квазиконформности.

ABSTRACT

This article shows that if an OIM-homeomorphic reflection is a transfer of a field into a field, then this reflection will be a quasiconform and its quasiconformality coefficient will be determined.

ВВЕДЕНИЕ

Отображение пространства \bar{R}^n полностью характеризуется соотношением между модулями семейств кривых Γ и модулями их образов Γ^* , наличие константы $K > 0$, с которой для всех семейств Γ выполнено двойное неравенства

$$K^{-1}M(\Gamma) \leq M(\Gamma^*) \leq KM(\Gamma) \quad (1)$$

Определяет K – квазиконформное отображение. В частности, если рассматривать ограничение K – квазиконформного отображения пространства \bar{R}^n на некотором континиуме Σ , то для любой пары подконтиниумов $E, F \subset \Sigma$ двойное неравенства (1) выполняется для семейства Γ всех кривых в \bar{R}^n , соединяющих контениумы E и F . В качестве Γ^* рассматривается семейство всевозможных кривых в \bar{R}^n соединяющих $f(E)$ и $f(F)$, Это позволяет рассмотреть класс гомеоморфных отображений континиума Σ в \bar{R}^n , для которых неравенство (1) выполняется при любом выборе подконтиниумов $E, F \subset \Sigma$. В этом классе, в частности, содержатся ограничения на Σ всех K -квазиконформных отображений пространства \bar{R}^n . Первоначальная идея рассмотрения гомеоморфизмов, определенных на континиумах и ограничено

искажающих модули (ОИМ-гомеоморфизмы), принадлежит П.П. Белинскому. В работах [3], [5]. изучены ряд свойств ОИМ-гомеоморфизмов. Прежде всего возникает вопрое о квазиконформности ОИМ-гомеоморфизмов, то есть при каких областей определения Σ , заданные на них ОИМ-гомеоморфизмы являются квазиконформными, конечно весьма актуальным является зависимость коэффициента K при неравенства (1).

ЛИТЕРАТУРА И МЕТОДОЛОГИЯ

Определение [5]. Гомеоморфное отображение $f : \Sigma \rightarrow \bar{R}^n$ связного подмножества $\Sigma \subset \bar{R}^n$ называется ограниченно искажающим модулем (или ОИМ-гомеоморфизмом), если имеется константа $K > 0$ такая, что неравенство

$$K^{-1}M(E, F) \leq M(f(E), f(F)) \leq KM(E, F)$$

выполняется для любой пары непересекающихся континуумов $E, F \subset \Sigma$. Наименшая из всех таких констант K , называется коэффициентом искажения гомеоморфизма f .

Пусть $f : D \rightarrow D'$ гомеоморфизм пространственных областей. Тогда f является квазиконформным только в том случае, если величина

$$\left\{ \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}, x \in D \setminus \{\infty, f^{-1}(\infty)\} \right\}$$

ограничена [2].

Приводим некоторые свойства ОИМ-гомеоморфизмов.

Теорема 1 [4]. Если гомеоморфизм $f : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ поверхностей класса C^1 в \bar{R}^n является ОИМ-гомеоморфизмом с коэффициентом искажения Q , то он является K -квазиконформным с $K \leq Q$.

Определение [5]. Парой называется объект вида $\langle \Sigma, U \rangle$, где $U \subset \bar{R}^n$ является окрестностью континуума $\Sigma \subset \bar{R}^n$. Гомеоморфизм $f : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ называется ОИМ-гомеоморфизмом пары $\langle \Sigma, U \rangle$ на пары $\langle \Sigma^*, U^* \rangle$ если он удовлетворяет следующему условию: существует константа $Q > 0$, такая, что для любых непересекающихся компактных континуумов $E, F \subset \Sigma$ и их образов $E^*, F^* \subset \Sigma^*$ выполняется оценка

$$Q^{-1}M(E, F; U) \leq M(E^*, F^*; U^*) \leq QM(E, F; U).$$

Пары $\langle \Sigma, U \rangle$ и $\langle \Sigma^*, U^* \rangle$ называются квазиконформно эквивалентным, если существует ОИМ-гомеоморфизм $f: \langle \Sigma, U \rangle \rightarrow \langle \Sigma^*, U^* \rangle$.

Теорема [5]. Если Σ -компактный континуум в области $U \subset \bar{R}^n$, то тождественное отображение $i: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ осуществляет ОИМ-гомеоморфизм пар $i: \langle \Sigma, U \rangle \rightarrow \langle \Sigma^*, \bar{R}^n \rangle$.

Следствие [5]. Пусть континуум Σ и Σ^* компактны соответственно в области U и U^* . Пары $\langle \Sigma, U \rangle$ и $\langle \Sigma^*, U^* \rangle$ квазиконформно эквивалентны тогда и только тогда, когда квазиконформно эквивалентны пары $\langle \Sigma, \bar{R}^n \rangle$ и $\langle \Sigma^*, \bar{R}^n \rangle$.

Это утверждение позволяет при изучение ОИМ-гомеоморфизмов не обращать внимание на объемлющее области U и U^* , если нас не интересует фактическая величина константы Q в определении ОИМ-гомеоморфизма.

В настоящей работе изучается свойства квазиконформности ОИМ-гомеоморфизма при отсутствие гладкости области определения. Для простоты приводим утверждение в случае $n=3$. Имеет место следующая.

Теорема. Если гомеоморфизм $f: \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ поверхностей в \bar{R}^n является ОИМ-гомеоморфизмом с коэффициентом искажения Q , то он является квазиконформным.

Доказательства. Пусть

$$B^3(x_0, r) \text{ есть шар } \{x \in R^3 : |x - x_0| \leq r\}$$

$$B^3(r) = B^3(0, r), \quad B^3 = B^3(0, 1)$$

$$S^2(x_0, r) \text{ есть сфера } \{x \in R^3 : |x - x_0| = r\}$$

$$S^2(r) = S^2(0, r), \quad S^2(0, 1)$$

Предположил, что $0 \in \Sigma$, $f(0) \in \Sigma^*$. Для $0 < r < 1$, рассмотрим сферу S^2 .

Пусть

$$M = \max_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|,$$

$$m = \min_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|.$$

Рассмотрим величину

$$L(r) = \frac{\max_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}{\min_{|x-x_0|=r} |f(x) - f(x_0)|}$$

и оценим её сверху

Обозначаем через S_1 и S_2 – прообразы сфер $S^2(f(0), M)$ и $S^2(f(0), m)$ соответственно и $E = \text{ext}S_1$, $F = \text{int}S_2$ на Σ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если γ_1 есть континуум, соединяющий o со сферой $S^2(0, r)$, γ_2 – континуум, соединяющий $S^2(0, r)$ с бесконечно удаленной точкой, то имеет место следующее неравенство

$$M(E, F; R^3) \geq M(\gamma_1, \gamma_2; R^3) \geq a(3). \quad (2)$$

Следовательно

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} L(r) \leq \exp \left\{ \left[\frac{4Q\pi}{a(3)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\},$$

и f является квазиконформным отображением.

REFERENCES

1. Сычев А. В. Модули и пространственные квазиконформные отображения, - Новосибирск «Наука». 1983., с. 152.
2. David В. Gault and M. K. Vamanamurthy. Quasiconformal extensions of mappings in n-space. Ann. Acad. Sci. Fenn. SerAI, 1977. V. 3. P. 229-248.
3. Варисов А. К. О продолжении пространственных квазиконформных отображений. Докл. АН СССР. Издательство «наука». Москва. 1977. Том 234. № 4. стр. 740-742.
4. Асеев В. В. Ворисов А. К. Об одном признаке квазиконформности отображений гладких поверхностей. Докл. АН СССР. Издательство «наука». Москва. 1977. Том 234. № 5. Стр. 1001-1003.
5. Асеев В. В. О гомеоморфизмах, ограниченно искажающих модули в объемлющем пространстве. Теория отображений, ее обобщения и приложения. Сб. научных трудов. Киев, Наукова думка 1982, стр. 9-18.