ACADEMIC RESEARCH IN EDUCATIONAL SCIENCES VOLUME 2 | ISSUE 8 | 2021
ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ДИВЕРГЕНТНОЙ ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ

А. З. Маматов
профессор кафедры «Математика и информатика» Ташкентского института текстильного и легкого промышленности

Г. Х. Джумабаев
Заведующий кафедры «Математика и информатика» Ташкентского института текстильного и легкого промышленности

АННОТАЦИЯ

В статье рассмотрена одна неклассическая квазилинейная задача параболического типа на плоскости, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции. Построено приближенное решение метода Галеркина рассматриваемой задачи. Доказана существования и единственность обобщенного решения задачи в пространстве $\widetilde{H^{1,1}}(Q_T)$ [1,2,3,4].

Ключевые слова: математика**,** наука**,** функция**,** координата, дифференция.

Рассмотрим квазилинейную задачу параболического типа, когда граничное условие содержит производную по времени от искомой функции [1,2,5,6,7]:

$$\begin{cases} u_t - \frac{d}{dx_i} a_i(x,t,u,\nabla u) + a(x,t,u,\nabla u) = 0 \quad , \\ u_t + a_i(x,t,u,\nabla u)\cos(\nu, x_i) = g(x,t,u), \quad (x,t) \in S_t \ , \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

где Ω – ограниченная область в E_2.

Предположим, что выполнены следующие условия:

А. При $(x,t,u,p) \in \{\overline{\Omega} \times [O,T] \times E_1 \times E_2\}$ функции $a_i(x,t,u,p)$, $a(x,t,u,p)$ измеримы по (x,t,u,p), непрерывны по (t,u,p) и удовлетворяют неравенствам

$$|a_i(x,t,u,p)| \leq C(|P| + |U|^k) + \varphi_1(x,t) \ , \varphi_1 \in L_2(Q_T) \ , \ \ i = 1,2 \tag{2}$$

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

$$|a(x,t,u,p)| \leq C(|P|^{2-\epsilon} + |U|^k) + \varphi_2(x,t)\,, \quad \varphi_2 \in L_q(Q_T), \tag{3}$$

где $|P| = (\sum_{i=1}^{m} p_i^2)^{\frac{1}{2}},\ \ k < \infty, \varepsilon > 0,\ q > 1$

Б. Функции $a_i(x,t,u,p)$ имеют вид [9,10,11,12,13]:

$$a_i(x,t,u,p) = \bar{a}_i(x,t,u,p) + \bar{\bar{a}}_i(x,p) \tag{4}$$

здесь

$$\bar{a}_i(x,t,u,p) = \frac{\partial \bar{a}(x,t,u,p)}{\partial p_i},$$

$$\left|\frac{\partial \bar{a}}{\partial t}\right| \leq C(|u|^{2r} + |p|^2) + \varphi_3(x,t)\,, \quad \varphi_3 \in L_1(Q_T)$$

$$\left|\frac{\partial \bar{a}}{\partial u}\right| \leq C(|u|^{r} + |p|) + \varphi_4(x,t)\,, \quad \varphi_4 \in L_2(Q_T) \tag{5}$$

$$r \geq 0 \quad , \quad \int_{\Omega} \bar{a}\,(x,t,u,\nabla u)dx \,\Big|_0^t \geq 0$$

В. Условие параболичности. Для любой гладкой функции U(x,t) справедливо неравенство [14,15,16,17,18].

$$\int_{Q_T} \bar{\bar{a}}_i\,(x,\nabla U)U_{tx_i}\mathrm{dxdt} \geq \nu \|\nabla \mathrm{U}\|^2_{\mathrm{L}_{2(\Omega)}} \tag{6}$$

где ν-положительная постоянная.

Г. Условие монотонности. Для любых функций $\mathrm{u}, v \leq H^1$

$$(a_i(x,t,u,\nabla u) - a_i(x,t,v,\nabla v), u_{x_i} - v_{x_i})_\Omega +$$

$$+(a(x,t,u,\nabla u) - a(x,t,v,\nabla v), u - v)_\Omega \geq 0 \tag{7}$$

Д. При $(x,t,u) \in \{\bar{\Omega} \times [o,T] \times E_1\}$ функция $g(x,t,u)$ непрерывна по (t,u) и удовлетворяет неравенству:

$$|g(x,t,u) - g(x,t,v)| \leq g_0|u - v|, \qquad g(x,t,0) \in L_2(S_T) \tag{8}$$

Определение. Обобщенным решением из пространства $\widetilde{\mathrm{H}^{1,1}}(Q_T) = \{u \in \mathrm{H}^{1,1}(Q_T): u_t \in L_2(S_T)\}$ задачи (1) назовем функцию из $\widetilde{\mathrm{H}^{1,1}}(Q_T)$ удовлетворяющую тождеству

$$\int_{Q_T} (u_t\eta + a_i(x,t,u,\nabla u)\eta_{xi} + a(x,t,u,\nabla u)\eta)\,dxdt +$$

$$+\int_{S_T} (u_t - g(x,t,u))\,\eta\,dxdt = 0 \tag{9}$$

Построим приближенное решение по Галеркину [3,4]. Возьмем координатную систему из пространства H^1. Приближенное решение U(x,t) будем искать в виде [19,20,21,22,23]

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{n} C_k^n(t)\varphi_k(x)$$

где $C_k^n(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(U_t,\varphi_j)_{\hat{L}_2}+(a_i(x,t,U,\nabla U),\varphi_{jx_i})_\Omega+(a(x,t,U,\nabla U),\varphi_j)_\Omega=$$
$$=(g(x,t,U),\varphi_j)_S\ ,\quad j=\overline{1,n} \tag{10}$$

и начальных условий

$$U(x,O)-U_0-\text{"мало"}$$

Если система $\{\varphi_k\}$ ортонормированна в метрике $\hat{L}_2(\Omega)$, то система (10) принимает вид

$$\dot{C}_i^n=f_j^n(t,C_1^n,\dots,C_n^n), \tag{11}$$

где $f_j^n(t,C_1^2,\dots,C_n^n)=-(a_i(x,t,U,\nabla U),\varphi_{jx_i})_\Omega-(a(x,t,U,\nabla U),\varphi_j)_\Omega+(g(x,t,U),\varphi_j)_S$

Условие А обеспечивает существование и непрерывность функции $f_j^n(t,C_1^n,\dots,C_n^n)$ по t и C_k^n. Поэтому для существования, по крайней мере одного решения задачи (11) на всем интервале [O,T] достаточно знать все возможные решения равномерно ограничены. Такая ограниченность следует из априорной оценки [19,20,21,22,23]

$$\max_{0\le t\le T}\|U(x,t)\|^2{}_{\hat{L}_2}+\|U_t(x,t)\|^2_{L_{2(o,T,\hat{L}_2)}}+\max_{0\le t\le T}\|\nabla U(x,t)\|^2_{\hat{L}_2}\le N \tag{12}$$

где N-постоянная, не зависящая от n.

Отсюда получим неравенство

$$\max_{0\le t\le T}\|C_n(t)\|^2=\max_{0\le t\le T}\|U(x,t)\|^2_{L_{2(\Omega)}}\le N,\ \ C_n=\{C_k^n(t)\}_{k=1}^n$$

Займемся теперь предельным переходом по $n\to\infty$. Из оценки (12) следует, что найдется такая функция u $(x,t)\in\overline{H^{1.1}}(Q_T)$ и такая под последовательность U(x,t), что функции U(x,t) сходятся к u(x,t) слабо в норме $\overline{H^{1.1}}(Q_T)$ и функции U_t сходятся к u_t в $L_2(S_t)$. Так как вложения $\overline{H^{1.1}}(Q_T)\in L_2(Q_t),L_2(S_t)$ компактны, то U(x,t)→ u(x,t) сильно в $L_2(S_t)$ и в $L_2(Q_t)$. Из этой сходимости следует сходимость U(x,t) к u(x,t) в $L_2(\Omega)$ и в $L_2(S)$ для почти всех t из [O,T] и почти всюду в Q_tUS_t. Кроме того, по теореме вложения, следует сильная сходимость U(x,t) в $L_{q^*}(Q_T)$, $q^*<q=2$ и слабая сходимость в $L_q(Q_T)$ [24,25,26,27,28].

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

Далее, из условия А следует, что функции $a_i(x,t,U,\nabla U)$ $i=\overline{1,2}$ и $a(x,t,U,\nabla U)$ имеют равномерно ограниченные нормы в пространствах $L_2(Q_t)$ и $L_1(Q_T)$ соответственно. Ввиду этого положим, что вся последовательность $a_i(x,t,U,\nabla U)$ $i=1,2$ сходится слабо в $L_2(Q_{\mathrm{T}})$ и элементам $A_i(x,t)$ пространства $L_2(Q_{\mathrm{T}})$ и функции $a(x,t,U,\nabla U)$ сходятся слабо к A(x,t)∈ $L_1(Q_T)$ в пространстве $L_1(Q_T)$ [29,30,31,32].

Обозначим через P_l совокупность линейных комбинаций вида

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{l} d_k(t)\varphi_k(x)$$

где $d_k(t)$ -произвольные гладкие на отрезке [O,T] функции. Умножая соотношения (10) на $d_k(t)$ суммируя по к от 1 до l и интегрируя от 0 до t, находим, что для любой функции $W(x,t)\in \mathrm{P_e}$ справедливо равенство

$$\int_0^t (U_t,W)_{\tau_2}\,dt+\int_{Q_t} a_i(x,t,U,\nabla U)W_{x_i}+a(x,t,U,\nabla U)W]dxdt=$$

$$=\int_{\mathrm{S_t}} \mathrm{g(x,t,U)}\,Wdxdt \qquad (13)$$

Перейдем к пределу по $n\to\infty$. В результате чего получаем:

$$\int_0^{\mathrm{T}}(\mathrm{U_t,W})_{\hat{L}_2}\mathrm{dt}+\int_{\mathrm{Q_T}}\left[\mathrm{A_i(x,t)W_{x_i}}+\mathrm{A(x,t)W}\right]\mathrm{dxdt}=\int_{\mathrm{S_T}}\mathrm{g(x,t,u)\,Wdxdt} \qquad (14)$$

Так как $\bigcup_{l=1}^{\infty} P_e$ плотно в $H^{1,0}(Q_T)$, то выполнив в (14) замыкание по W получаем, что равенство (14) справедливо для любой функции $W\in H^{1,0}(Q_T)$.

Из равенства (14) получим, что функция U(x,t) есть искомое обобщенное решение.

Докажем единственность решения. Пусть $U_1(x,t),U_2(x,t)$ два решения задачи (9), тогда их разность U_1-U_2 удовлетворяет соотношению

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

$$\int_{Q_t} \frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial t}(U_1 - U_2)dxdt + a_0 \int_{S_t} \frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial t}(U_1 - U_2)dxdt$$

$$+ \int_{Q_T} \{[a_i(x, t, U_1, \nabla U_1) - a_i(x, t, U_2, \nabla U_2)](U_1 - U_2)_{x_i}$$

$$+ [a(x, t, U_1, \nabla U_1) - a(x, t, U_2, \nabla U_2)](U_1 - U_2)\}dxdt$$

$$= \int_{S_t} [g(x, t, U_1) - g(x, t, U_2)]\,(U_1 - U_2)dxdt$$

Воспользовавшись условиями (5) и (7), получим

$$\int_{\Omega} (U_1 - U_2)^2\, dx + a_0 \int_{S} \int_{\Omega} (U_1 - U_2)^2\, dx \leq 2\, g_0 \int_{S_T} \int_{\Omega} (U_1 - U_2)^2\, dxdt$$

Следовательно $U_1 \equiv U_2$. Таким образом, доказана:

ТЕОРЕМА. Если выполнены условия А-Д, то существует единственное обобщенное решение задачи (1) в пространстве $\widetilde{H^{1,1}}(Q_T)$.

REFERENCES

1. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа// М.-Наука,-1967.-736 С.

2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа// М.-Наука,-1973.-576 С.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов//М.-Наука,-1966.-432 С.

4. Маматов А.З. Применения метода Галеркина к некоторому квазилинейному уравнению параболического типа// Вестник ЛГУ,-1981.-№13.-С.37-45.

5. Кудинов В, Карташов Э, Калашников В. Теория тепломассопереноса: решение задач для многослойных конструкций. М.-« Юрайт». -2018.-435 с.

6. Rakhimov, S., Seytov, A., Nazarov, B., Buvabekov, B., Optimal control of unstable water movement in channels of irrigation systems under conditions of discontinuity of water delivery to consumers. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 883 (2020) 012065, Dagestan, 2020, IOP Publishing DOI:10.1088/1757-899X/883/1/012065 (№5, Scopus, IF=4,652)

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

7. A. Kabulov, I. Normatov, A. Seytov and A. Kudaybergenov, "Optimal Management of Water Resources in Large Main Canals with Cascade Pumping Stations," 2020 IEEE International IOT, Electronics and Mechatronics Conference (IEMTRONICS), Vancouver, BC, Canada, 2020, pp. 1-4, DOI: 10.1109/IEMTRONICS51293.2020.9216402 (№ 5, Scopus, IF= 9.936).
8. Shavkat Rakhimov, Aybek Seytov, Nasiba Rakhimova, Bahrom Xonimqulov. Mathematical models of optimal distribution of water in main channels. 2020 IEEE 14th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT), INSPEC Accession Number: 20413548, IEEE Access, Tashkent, Uzbekistan, DOI:10.1109/AICT50176.2020.9368798 (AICT) pp. 1-4,(№ 5, Scopus, IF=3,557)
9. A.V. Kabulov, A.J. Seytov, A.A. Kudaybergenov, Classification of mathematical models of unsteady water movement in the main canals of irrigation systems, International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4, April 2020, ISSN: 2350-0328, India, pp. 13392- 13401.(№ 5, Web of science, IF=3,98)
10. Sh.Kh.Rakhimov, A.J. Seytov, A.A. Kudaybergenov, Optimal control of unsteady water movement in the main canals. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 7, Issue 4, April 2020, India, ISSN: 2350-0328, pp. 13380-13391. (№ 6, Web of science, IF=3,98).
11. A.J. Seytov, A.R. Kutlimuradov, R.N. Turaev,N.K. Muradov,A.A. Kudaybergenov, Mathematical model of optimal control of the supply canal to the first pumping station of the cascade of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology Vol. 8, Issue 3, March 2021. India. ISSN: 2350-0328. pp. 16790- 16797. (№5, web of science IF=6,646)
12. A. V. Kabulov, A. J. Seytov & A. A. Kudaybergenov. Mathematical models of the optimal distribution of water in the channels of irrigation systems. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN(P): 2249–6890; ISSN(E): 2249–8001 Vol. 10, Issue 3, Jun 2020, pp. 14193–14202 (№5 Scopus IF = 9.6246)
13. Sh. Kh. Rakhimov, A. J. Seytov, D. K. Jumamuratov & N. K. Rakhimova. Optimal control of water distribution in a typical element of a cascade of structures of a machine canal pump station, hydraulic structure and pump station. India. International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD) ISSN (P): 2249–6890; ISSN (E): 2249–8001 Vol. 10, Issue 3, Jun 2020, pp. 11103-11120. (№5 Scopus IF = 9.6246)

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

14. А.СЕЙТОВ. Оптимальные методы управления водных ресурсов в крупных магистральных каналах ирригационных систем. AGRO ILM – O‘ZBEKISTON QISHLOQ VA SUV XO‘JALIGI. Махсус сон. 2020. Ташкент. Стр. 84-86.
15. Mekhriban Salaeva, Kakhramon Eshkaraev, Aybek Seytov. Solving mathematical problems in unusual ways with excellent limits. European Scientific Conference. Пенза, 17 мая 2020 года pp. 254-257.
16. Рахимов Ш. Х., Сейтов А. Ж., Кудайбергенов А. А. Критерии управления задач оперативного управления водными ресурсами объектов водохозяйственных систем. Abstracts of IX International Scientific and Practical Conference Kharkiv, Ukraine 2-4 August 2020. Стр. 125-131.
17. Сейтов А. Ж., Кудайбергенов А. А., Хонимкулов Б. Р. Моделирования двумерного неустановившегося движения воды на открытых руслах на основе проекционного метода. сборник докладов Республиканской научно-технической конференции «Инновационные идеи в разработке информационно-коммуникационных технологий и программных обеспечений» 15-16 мая 2020 года. САМАРҚАНД. Стр. 60-63.
18. Рахимов Ш.Х., Сейтов А.Ж. Теоретико-множественная модель насосной станции, оснащенная осевыми поворотно-лопастными насосными агрегатами. Материалы республиканской научной онлайн конференции молодых ученых «современные проблемы математики и прикладной математики» посвященной 100 летию академика С.Х.Сираждинова (21 мая 2020 г.) Стр. 78-82.
19. A.J.Seytov, A.J. Khurramov, S.N.Azimkulov, M.R.Sherbaev, A.A.Kudaybergenov. S.Kh.Khasanova. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. T. 8 №2 ISSN: 2350-0328. Pp. 17177-17185.
20. A.A. Kudaybergenov A.J. Seytov, A.R. Kutlimuradov, R.N. Turaev, N.K. Muradov. Mathematical model of optimal control of the supply canal to the first pumping station of the cascade of the Karshi main canal. International Journal of Advanced Research in Science, Engineering and Technology. T. 8 № 3 pp. 16790-16797.
21. А.Ж. Сейтов, Б.Р. Ханимкулов, М.А. Гаипов, М.Р. Юсупов. Зарфшон дарёси оқимининг ҳосил бўлишига атмосфера ёғинлари ва ҳаво ҳароратининг таъсири. Academic research in educational sciences. Т.2 №5. Стр. 156-162.
22. АЖ Сейтов, БР Ханимкулов, М Гаипов, О Хамидуллаева, НК Мурадов. Численные алгоритмы решения задач оптимального управления объектами

ISSN: 2181-1385
Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723
Directory Indexing of International Research Journals-CiteFactor 2020-21: 0.89
DOI: 10.24412/2181-1385-2021-8-120-127

каршинского магистрального канала. Academic research in educational sciences. Т. 2 № 3 pp. 1145- 1145.

23. А.В. Кабулов, А.Ж. Сейтов, А.А. Кудайбергенов. Критерий управления задач оперативного управления водными ресурсами объектов водохозяйственных систем. ILIM hám JÁMIYET. Стр. 6-8

24. А. Ж. Сейтов А. Р. Кутлимурадов Р. Н. Тураев Э. М. Махкамов Б. Р. Хонимкулов. Оптимальные управления водных ресурсов крупных магистральных каналов с каскадом насосных станций ирригационных систем. Academic research in educational sciences volume 2 | ISSUE 2 | 2021 ISSN: 2181-1385 Scientific Journal Impact Factor (SJIF) 2021: 5.723 DOI: 10.24411/2181-1385-2021-00193. Стр. 265- 273.

25. A Zh Seitov, BR Khanimkulov. Mathematical models and criteria for water distribution quality in large main irrigation canals. Academic research in educational sciences. Uzbekistan. Ares.uz. Vol. 1. №2, 2020. ISSN 2181-1385. Pp.405-415. (№5, web of science IF=5.723)