ФУНКЦИЯЛАРНИ ТИКЛАШДА БЎЛАК-ПОЛИНОМИАЛ УСУЛЛАР ТАХЛИЛИ

Хакимжон Насриддинович Зайнидинов
т.ф.д, проф, Муҳаммад ал-Хоразми номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети (ТАТУ),
tet2001@rambler.ru

Бунёд Рахимжонович Азимов
PhD, Муҳаммад ал-Хоразми номидаги Тошкент ахборот технологиялари университети (ТАТУ),
bunyodbekazimov@mail.ru

Мухриддин Мухиддин ўғли Абдуғаниев
докторант, Заҳириддин Муҳаммад Бобур номидаги Андижон давлат университети (АДУ),
mr_muhriddin_20@mail.ru

АНОТАТЦИЯ

Ушбу мақола жадвал кўринишда берилган функцияларни тиклаш масаласида қулай бўлган бошқа бир функция билан алмаштириш ва уларни тахлил қилишга бағишланган. Дастлаб классик интерполяцион моделлар кенг қўлланилган. Мақолада дастлаб классик интерполяцион моделлардан бири бўлган Лагранж интерполяцион модели кўриб чиқилган. Лагранж моделни қуришда берилган қийматларнинг ортиб бориши уларни қуришда муаммоларни кэлтириб чиқарди. Катта ҳажмли жадвал қийматларини тиклашда қурилган классик интерполяцион моделлар ёрдамида қурилган функция тугун нуқталарига яхши яқинлашмайди. Бу муаммоларни ҳал қилиш мақсадида бўлак-полиномлардан кенг қўлланилиб келмоқда. Ушбу ишда ҳам бўлак-полиномлардан бўлган кубик Bezier ва B-сплайн функцияларини қуриш ва функция қийматлари асосида тиклаш жараёни графиклар ёрдамида келтириб ўтилган. Кубик сплайн функцияларда тугун нуқталар сони ортиб бориши билан уларни тиклашда юқори аниқлик сақланиб қолади. Тадқиқот якунида қурилган Лагранж классик интерполяцион методи ва бўлак-полиномиал усуллар расмлар ёрдамида таҳлил қилинган.

Калит сўзлар: Лагранж интерполяцион модел, кубик Bezier сплайн, кубик B-сплайн, бўлак-полиномиал усуллар, аппроксимациялаш, функциялар, тугун нуқталар.

ABSTRACT

This article is devoted to replacing and analyzing the functions given in the table view with another function that is convenient in the matter of restoration. Initially, classical interpolation models were widely used. The article first discusses the Lagrange interpolation model, one of the classic interpolation models. The increase in the values given in the construction of the Lagrange model caused problems in their construction. The function built using classical interpolation models built on the restoration of large-volume table values does not approach the node points well. Fragmentary polynomials have been widely used to solve these problems. In this work, the process of constructing and reconstructing cubic Bezier and B-spline functions from fractional polynomials based on function values is presented using graphs. As the number of node points in cubic spline functions increases, high accuracy is maintained in their recovery. The Lagrange classical interpolation method and fragmentary-polynomial methods constructed at the end of the study were analyzed using images.

Keywords: Lagrange interpolation model, cubic Bezier spline, cubic B-spline, fragment-polynomial methods, approximation, functions, node points.

КИРИШ

Биламизки, математикада яқинлашиш назарияси функцияларни қандай қилиб соддароқ функциялар билан энг яхши яқинлаштириш мумкинлиги ва улар томонидан киритилган хатоларни миқдорий тавсифлаш билан боғлиқ. Бу одатда полином кўпҳадлар ёрдамида амалга оширилади. Аппроксимациялаш жараёнида хатоликлар кам бўлиши таъминлаш учун бўлак-полиномиал усуллардан кенг қўлланилади. Бугунги кунда сигналларга рақамли ишлов беришда бўлак полиномлардан фойдаланиш илмий тадқиқотларда кенг ўрганилмоқда. Бунда асосий эътиборли жойи уларни аниқлик даражаси юқори ҳолатда тиклаш ва мавжуд сигнал қийматлари оралиғидаги қийматларни топиш ҳисобланади. Бунинг учун қурилган моделлар асосида интерполяциялаш жараёни амалга оширилади. Биламизки интерполяция - бу маълум маълумотлар нуқталари орасида жойлашган номаълум қийматларни аниқлаш жараёни ҳисобланади. Мисол сифатида шовқин даражаси, ёғингарчилик, баландлик ва бошқалар каби ҳар қандай географик маълумотлар нуқталари учун номаълум қийматларни башорат қилиш учун ишлатилади [1,2,3,10,14]. Умумий қилиб, интерполяциялашда берилган жадвал ёки графикнинг бирор қийматлари бўйича оралиқ қийматни топишга ҳаракат қилинади деб айтишимиз мумкин. Қуйида бунга доир бир нечта интерполяцион моделларни кўриб чиқамиз.

АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Дастлаб, классик интерполяцион методларидан бири Лагранж интерполяцион моделини қурилишини кўриб чиқамиз [1,10,12,13].

Изланаётган кўпҳадни қуйидагича олайлик(1):

$$L_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \tag{1}$$

Бу ерда a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ – номаълум ўзгармас коэффициентлар. Интерполяция масаласидаги шартга кўра $L_n(x)$ функция $x_0, x_1, \ldots, x_n$ интерполяция тугунларида $L_n(x_0) = y_0$, $L_n(x_1) = y_1$, …, $L_n(x_n) = y_n$ қийматга эришади. У ҳолда x_0 интерполяция тугунида $L_n(x)$ интерполяцион кўпҳад

$$L_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n$$

кўринишга, x_1 интерполяция тугунида

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n$$

кўринишга ва ниҳоят x_n интерполяция тугунида

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n$$

кўринишга эга бўлади. Буларни $n+1$ номаълумли тенгламалар системаси кўринишида ифодалаймиз:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{2}$$

Бу ерда x_i ва y_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ – мос равишда берилган функциянинг жадвал қийматлари.

Системадаги $a_0, a_1, \ldots, a_n$ номаълумларни Крамер формуласи ёрдамида аниқлаймиз:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta},\ a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ldots,\ a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{3}$$

Бу ерда Δ - (2) система детерминанти. Агар $\Delta \neq 0$ бўлса, у ҳолда система ягона ечимга эга бўлади. Ҳақиқатан (2) системанинг детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ тугунлар устма-уст тушмаган ҳолда нолдан фарқли бўлади. Номаълум $x_0, x_1, \ldots, x_n$ коэффицентлар сонини аниқлаб, изланаётган кўпҳадни

$$L_n(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta} + \frac{\Delta_1}{\Delta} x + \frac{\Delta_2}{\Delta} x^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta} x^n$$

(4)

каби ифодалаш мумкин. Ёки бошқача

$$L_n(x) = y_0Q_0(x) + y_1Q_1(x) + \cdots + y_nQ_n(x) = \sum_{i=1}^{n} y_iQ_i(x) \qquad (5)$$

кўринишда ифодаланиши мумкин. Бу ерда кўриниб турибдики $Q_i(x)$ функция

$$Q_i(x_j) = \begin{cases} 0, \text{агар } i \neq j \text{ бўлса,} \\ 1, \text{агар } i = j \text{ бўлса} \end{cases}$$

шартини қаноатлантириши керак, осонгина текшириб кўриш мумкинки, бундай шартни қаноатлантирувчи кўпҳад

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ нуқталарда $Q_i(x)$ функция 0 га, x_i нуқтада 1 га тенг бўлади. (5) ва (6) натижани эътиборга олсак,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i \qquad (7)$$

кўринишдаги Лагранж интерполяцион формуласига эга бўламиз.

Мисол сифатида 1-жадвалдаги қийматлари асосида Лагранж интерполяцион моделини қуриш амалга оширилди.

1-жадвал.

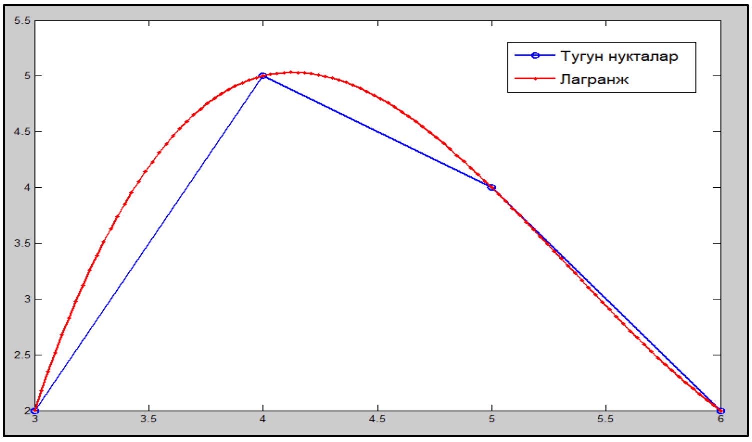
f(x) функциянинг дастлабки қийматлари.

x	3	4	5	6
y	2	5	4	2

Жадвалда келтирилган қийматларнинг сони 4 та бўлганлиги учун *n=3* даражали кўпҳад қурилади. Жадвалдаги қийматларни юқоридаги (7) формуладан фойдаланган ҳолда, бир қанча соддалаштиришлардан сўнг, қуйидаги кўпҳадга эга бўламиз.

$$L(x) = 0.5x^3 - 8x^2 + 40.5x - 61 \qquad (8)$$

Жадвалда берилган қийматларни (8) формула асосида Матлаб ишчи муҳитида график кўринишини ҳосил қиламиз (1-расм).



1-расм. Лагранж моделини интерполяциялаш натижаси

Расмдан кўришимиз мумкинки, Лагранж модели *f(x)* функцияни жадвалда келтирилган тугун нуқталаридан ўтган лекин функцияга яхши яқинлашганини кўришимиз мумкин.

Бўлак-полиномлардан бири бўлган Bezier кубик сплайн функциясини қуришни кўриб чиқамиз [7,8,9,11]:

Умумий ҳолатда, P_i нуқталар учун n даражали Bezier сплайн моделини қуришни формуласи келтирилган (8):

$$B(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(x) P_i \quad (8),$$

бу ерда, $b_{i,n}(x)$ Бернштейн полиномлари дейилади ва қуйидагича ҳисобланади (9):

$$b_{i,n}(x) = C_i^n x^i (1-x)^{n-i} \quad (9),$$

ва C_i^n Бином коэффицентлар дейилади. C_i^n коэффицентларни (10) формула асосида ҳисоблаб топилади.

$$C_i^n = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} \quad (10),$$

бу ерда, *n!* – n фактариални билдиради.

Демак, (9) ва (10) формулаларини бирлаштириб, натижада n даражали Бернштейн полиномларини аниқлайдиган формулага эга бўламиз (11):

$$b_{i,n}(x) = \frac{n!}{i!\,(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i} \quad (11),$$

Мисол учун (11) формулаларидан фойдаланиб, кубик Бернштейн полиномларини ҳисоблаймиз:

$$b_{0,3}(x) = \frac{3!}{(3-0)!} x^0 (1-x)^{3-0} = (1-x)^3 \quad (11.1),$$

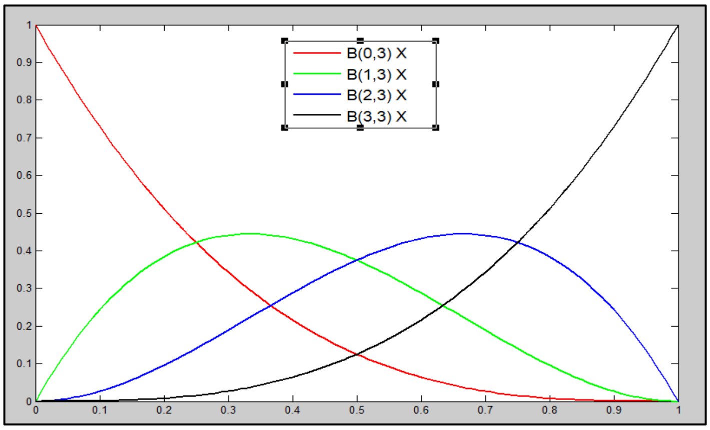
$$b_{1,3}(x) = \frac{3!}{(3-1)!} x^1 (1-x)^{3-1} = 3x(1-x)^2 \quad (11.2),$$

$$b_{2,3}(x) = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} x^2 (1-x)^{3-2} = 3x^2(1-x) \quad (11.3),$$

$$b_{3,3}(x) = \frac{3!}{3!} x^3 (1-x)^{3-3} = x^3 \quad (11.4).$$

ISSN: 2181-1385
Cite-Factor: 0,89 | SIS: 1,12
DOI: 10.24412/2181-1385-2022-5-1092-1101
SJIF: 5,7 | UIF: 6,1

Кубик Бернштейн полином кўпҳадлари [0:1] оралиқда қуйидаги кўринишга эга бўлади (2-расм).



2-расм. Кубик Бернштейн полином кўпҳадлари кўринишлари.

Мисол сифатида 1-жадвалда берилган нуқталар учун *учинчи* даражали Bezier сплайн моделини қурамиз. (1) формулада *n=3* бўлганда, (11.1), (11.2), (11.3), (11.4) лардан фойдаланиб *B(x)* кўпҳадини ҳосил қиламиз (12).

$$B(x) = P_0 B_{0,3}(x) + P_1 B_{1,3}(x) + P_2 B_{2,3}(x) + P_3 B_{3,3}(x) =$$
$$= P_0(1-x)^3 + P_1 3x(1-x)^2 + P_2 3x^2(1-x) + P_3 x^3. \qquad (12).$$

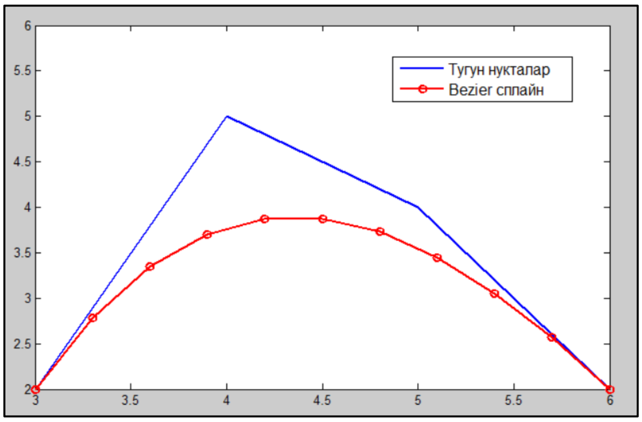
бу ерда, P_0, P_1, P_2, P_3 қийматлар:

P_0= A(3,2); P_2= C(5,4);
P_1= B(4,5); P_3= D(6,2);

каби белгилаб оламиз. Берилган P_0, P_1, P_2, P_3 нуқталарнинг кординаталари x_0, x_1, x_2, x_3 ва y_0, y_1, y_2, y_3 бизга маълум (1-жадвал). Янги ҳосил бўладиган сплайн функция *X* ва *Y* координаталари қуйидагича аниқланади.

$$X(u) = x_0 u^3 + x_1 3u(1-u)^2 + x_2 3u^2(1-u) + x_3 u^3.$$
$$Y(u) = y_0 u^3 + y_1 3u(1-u)^2 + y_2 3u^2(1-u) + y_3 u^3.$$

бу ерда, $y \in [0:1]$ оралиқда бўлиб 0.1 қадамда ҳисобланади. *X* ва *Y* ўзгарувчилари ҳосил қилган координаталар графиги 3-расмда келтирилган.



3-расм. Bezier сплайн ёрдамида аппроксимациялаш натижаси

Расмда дастлаб танлаб олинган нуқталар ва бу нуқталар асосида ҳосил қилинган сплайн функция ёрдамида ҳисобланган қийматлар тасвирланган. Кўришимиз мумкинки, 3-даражали Bezier сплайн функцияси нисбатан яхши яқинлашмаган.

Қуйида кубик B-сплайн функциясини қуришни кўриб чиқамиз. Қаралаётган функция етарлича силлиқ бўлмаса, у ҳолда бу функцияни сплайн функциялар билан яқинлаштириш мақсадга мувофиқ бўлади. Яқинлаштириш аниқлиги юқори бўлган сплайн функцияни учунчи даражали B-сплайнидан фойдаланиш яхши самара беради [1,2,3,6,8,10]. Қуйида n – даражали ихтиёрий $S_n(x)$ интерполяцияланадиган $f(x)$ функция қуйидаги кўринишга эга бўлган B-сплайннинг [a:b] оралиқдаги формуласи келтирилган (13):

$$f(x) \cong S_n(x) = \sum_{i=-1}^{n-1} b_i B_{i,n}(x), \qquad a \le x \le b, \tag{13}$$

Бу ерда n – сплайн даражаси, b_i – коэффициентлар, $B_{i,n}(x)$ асосий функцияни ифодалайди. Юқоридаги формула асосида $n=3$ ҳолатида кубик B-сплайн функциясини қуриб чиқамиз (14).

$$S_3(x) = b_{-1}B_{-1}(x) + b_0B_0(x) + b_1B_1(x) + b_2B_2(x), \qquad (14),$$

(13) формуладаги $B_{i,n}(x)$ асосий функциянинг қийматларини қуйидагича ҳисоблаймиз (15), (16):

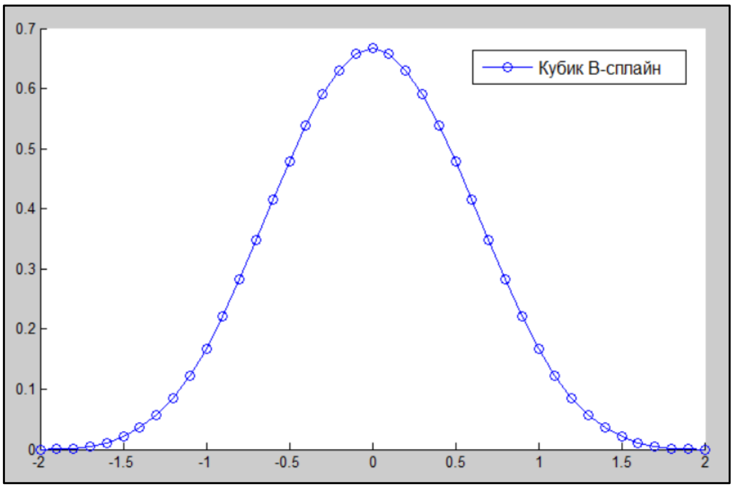
$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x_i \le x < x_{i+1}, \\ 0, & \text{бошқа ҳолатда.} \end{cases} \tag{15}$$

$$B_{i,n}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+n} - x_i} B_{i,n-1}(x) + \frac{x_{i+n} - x}{x_{i+n} - x_{i+1}} B_{i+1,n-1}(x), \qquad (16),$$

$B_{i,3}(x)$ асосий функцияни $x \in [0:2]$ оралиқда ҳисоблаймиз. Бир қанча ҳисоблашлар ва соддалаштиришлардан сўнг кубик B-сплайннинг асосий функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади (17).

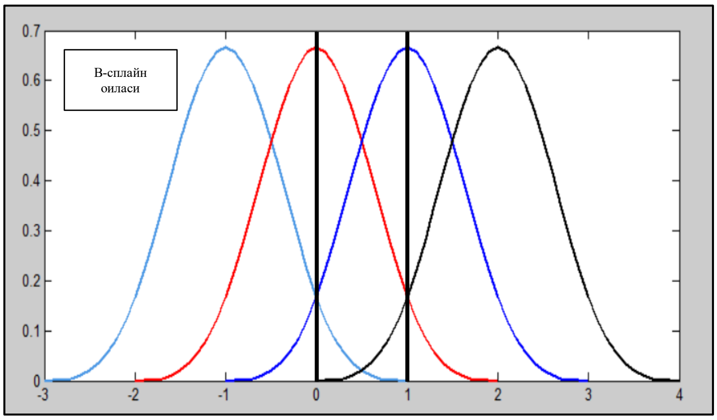
$$B_3(x) = \begin{cases} 0, & x \ge 2, \\ \frac{(2-x)^3}{6}, & 1 \le x < 2, \\ \frac{1+3(1-x)+3(1-x)^2-3x^3}{6}, & 0 \le x < 1, \\ B(-x), & 0 < x \end{cases} \tag{17}$$

Кубик B-сплайннинг асосий функциясини [-2:2] оралиғидаги графиги Матлаб ишчи муҳитида қуйидаги кўринишда бўлади (4-расм)



4-расм. Кубик В -сплайн.

Қуйидаги расмда кубик В-сплайнлар оиласини барча қисмлари [-3:4] оралиқда ажратиб кўрсатилган. $B_{-1}(x)$ – оч кўк рангда, $B_0(x)$ – қизил, $B_1(x)$ – тўқ кўк, $B_2(x)$ – қора рангда чизилган. (5-расм).



5-расм. Кубик В-сплайн оиласи.

$S_3(x)$ ни ҳисоблаш жараёнида В-сплайннинг [0:1] оралиқдаги қийматларидан фойдаланиб, сигналларни юқори аниқликда тиклашга эришилади.

(13) формуладаги b_i коэффициентларни ҳисоблаш жараёнида берилган қийматларнинг қанчадан олинишига кўра турлича ҳисобланади [5,6]. Биз берилган қийматлар ёрдамида b_i коэффициентларни *уч*, *беш*, *етти* нуқтали формула ёрдамида аниқлаймиз (18), (19), (20).

b_i коэффициентларни ҳисоблашнинг 3 – нуқтали формуласи:

$$b_i = \left(\frac{1}{6}\right)(-f_{i-1} + 8f_i - f_{i+1}), \qquad (18),$$

b_i коэффициентларни ҳисоблашнинг 5 – нуқтали формуласи:

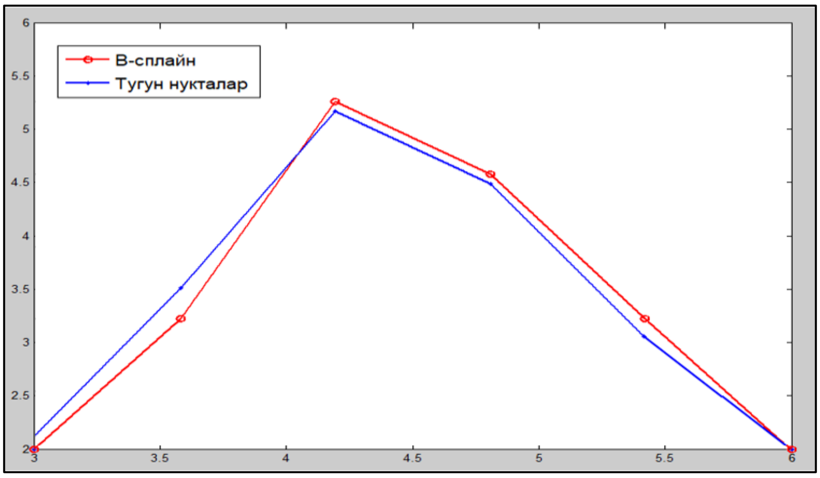
$$b_i = \left(\frac{1}{36}\right)(f_{i-2} - 10f_{i-1} + 54f_i - 10f_{i+1} + f_{i+2}), \qquad (19),$$

b_i коэффициентларни ҳисоблашнинг 7 – нуқтали формуласи:

$$b_i = \left(\frac{1}{216}\right)(-f_{i-3} + 12f_{i-2} - 75f_{i-1} + 344f_i - 75f_{i+1} + 12f_{i+2} - f_{i+3}), (20).$$

бу ерда, f_i – дастлабки берилган нуқталар қиймати.

Мисол сифатида берилган 1-жадвалнинг қийматларини (14) дан фойдаланиб аппроксимация қиламиз. Аппроксимациялаш жараёни графиги 6-расмда келтирилган.



6-расм. B-сплайн ёрдамида аппроксимациялаш натижаси.

Расмдан кўринадики, 1-жадвалда берилган нуқталарга B-сплайн функциясини аппроксимациялаш жараёни юқори аниқликда бўлганини кўрсатади.

ХУЛОСА

Хулоса қилиб айтадиган бўлсак, тадқиқот натижаларидан келиб чиқган ҳолда, сигналларга ишлов беришда классик полиномларни қўллаш бир қанча ноқулайликлар туғдиради. Улардан бири қийматлар сони кўпайиб бориши билан моделнинг қурилиши мураккаблашиб, олинган натижалар хатоликлари ортиб кетади. Бундай ҳолатни мақолада Лагранж интерполяцион методини қурилиш усулини келтириб, функцияларни интерполяциялаш ва аппроксимация қилиш жараёнида келтириб ўтилди (1-расм). У ерда келтирилган камчиликларни бартараф қилиш мақсадида бўлак-полиномиал усулларидан кубик Bezier сплайни ва B-сплайн функцияларини қўллаб натижалар олинди (3,6-расмлар). 6-расмлардаги натижага кўра, B-сплайн модели қўллаш орқали юқори даражадаги аниқликка эришиш мумкин эканлиги асосланди.

REFERENCES

1. Исроилов М.И., Ҳисоблаш методлари. №1, 1988. Тошкент. – Б. 45-52.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. - 352 с.
3. Касимов С.С., Зайнидинов Х.Н. ные сплайны в задачах восстановления одномерных и многомерных зависимостей // Известия международной академии наук высшей школы. № 1, 2002, Москва. - С. 162- 167.
4. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R. Construction of interpolation splines minimizing semi-norm in space// BIT Numer. Math. 2013. – 152 p.
5. Zaynidinov X.N., Azimov R.K., Azimov B.R. Funksiyalarni splayn funksiyalar bilan yaqinlashtirish // «Nazorat, optimallashtirish va dinamik tizimlar» nomli Respublika ilmiy anjuman. Andijon, 2019. – B. 49-50.
6. Zaynidinov X.N., Baxramov S.A. Teoriya splaynov. Monografiya – T.: “Aloqachi”, 2019, - 174 c.
7. Bezier and B-Spline Techniques 2002nd Edition – Hartmut Prautzsch, ISBN-10 : 3540437614, ISBN-13: 978-3540437611 Springer, 2002nd edition (August 6, 2002);
8. Bézier and Splines in Image Processing and Machine Vision – Sambhunath Bisvas, Brian C. Lovell, ISBN 978-1-84996-687-0, Springer-Verlag London Limited 2008;
9. Zaynidinov H.N., Azimov B.R., Abduganiev M.M *Scientific Collection «InterConf»*, (100): vith the Proceedings of the 6th International Scientific and Practical Conference «Global and Regional Aspects of Sustainable Development» (February 26-28, 2022). Copenhagen, Denmark: Berlitz Forlag, 2022. 800-803 p. ISBN 978-87-615-0721-1
10. Azimov B.R. Splayn-funksiyalar yordamida aproksimatsiyalash // «Zamonaviy ishlab chiqarishning ish samaradorligi va energo-resurs tejamkorligini oshirish muammolari» mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. Andijon, 2018. – B. 528-529.
11. Azimov B.R. Ibragimov S.S. Signallarga raqamli ishlov berish va uning imkoniyatlari // “Zamonaviy ishlab chiqarishning ish samaradorligi va energo-resurs tejamkorligini oshirish muammolari” mavzusidagi Xalqaro ilmiy-amaliy anjuman. 2018. Andijon. – B. 511-513.
12. Baxromov S.A., Azimov B.R. Lagranj interpolyatsion modelini qurish va signallarga tadbiqi. Respublika ilmiy-texnik anjumanining maъruzalar to‘plami 1-qism. 14-15 mart 2019 yil. Toshkent. – B. 320-321.
13. Baxromov S.A., Azimov B.R. Teng oraliqlar uchun Lagranj va lokal interpolyatsion kubik splayn modellarini qurish va signallarga tadbiqi // “Axborot kamunikatsiya texnologiyalari va dasturiy taъminot yaratishda inovatsion g‘oyalar” nomli Respublika ilmiy-texnik anjumani. 2019. Samarqand. – B. 55-57.
14. Sadaddinova S.S., Pozilov M.S., Toshpo‘latov M. Sonli usullar va dasturlash: O‘quv qo‘llanma. – Toshkent: TATU, 2015. – 385 B.