KOMPLEKS SONLARNI KO'PHAD ILDIZLARINI TOPISHDA TADBIQ QILISH

Ravshanbek Rozboyevich Kutlumuratov
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti o'qituvchisi
ravshanbektdiutf@gmail.com

Asqar Jaxangirovich Ismailov
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti o'qituvchisi
ismailasqar@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada kompleks sonlar mavzusini o'qitishda, ba'zi uslub va metodlardan kelib chiqib, kompleks sonlarni tadbiq qilish orqali ko'phad ildizlari yechimlarini topish usuli bayon qilingan.

Kalit so'zlar: Kompleks sonlar va ular ustida amallar, kompleks sonlarning algebraik ko`rinishi, geometrik tasviri, trigonometrik ko`rinishda yozilishi, Muavr formulasi.

ABSTRACT

This article describes the method of finding solutions of polynomial roots by applying complex numbers in the teaching of complex numbers based on some methods and methods.

Keywords: Complex numbers and operations on them, algebraic representation of complex numbers, geometric representation, writing in trigonometric form, Muavr formula.

KIRISH

Hozirgi kunda jahon miqiyosida aniq fanlarga bo'lgan qiziqish ortib borayotgan bir davrda, mamlakatimizda ham bu fanlarni o'qitish takomillashib borayotir, shu o'rinda prezidentimiz Shavkat Mirziyoyev o'z ma'ruzalarida "Matematika hamma aniq fanlarga asos. Bu fanni yaxshi bilgan bola aqlli, keng tafakkurli bo'lib o'sadi, istalgan sohada muvoffaqiyatli ishlab ketadi" degan fikrni keltirib o'tgan.

Fan va texnika jadal sur'atlar bilan rivojlanayotgan bugungi kunda ilmiy bilimlar, tushuncha va tasavvurlar hajmi keskin ortib bormoqda. Shu sabab biz O'zbekiston Respublikasi kelajagiyoshlarni matematika faniga o'rgatishimiz dolzarb masala bo'lib hisoblanadi. Kompleks sonlar mavzusi bizga maktab matematika kursidan tanish hisoblanadi. Bu mavzuni oliy ta'lim muassasalarida alohida fan sifatida ham o'qitiladi.

Bu soha texnikada, ishlab chiqarishning ko'plab sohalarida g'oyat keng qo'llanishga ega.

MUHOKAMA

Ma'lumki matematika fan sifatida talabalarning tafakkurini shakllantirish, turli muommali vaziyatlarga echim topish raqamlashtirish tehnologiyalarini anglashda yuksak o'rin egallaydi. Bugungi zamonaviy ta'lim tizimining o'zi turlicha fanlarning g'oyalari va metodlari uzviy ta'siriga asoslangan. Tabiiyki bu ko'p jihatdan matematik fikrlash bilan bog'liq munosabatlar hisoblanadi. Maktab o'quv dasturlariga matematika fani kiritilishi, o'quv jarayonini chuqurroq o'zlashtirishga xizmat qiladi va o'quvchilarni bozor munosabatlari sharoitida hayot va mehnatga tayyorlaydi.

Ma'lumki iqtisodiyotning amaliy masalalari aksariyat hollarda matematiklar tomonidan hal qilinadi.

Kompleks sonlar

Ta'rif. *Agar x va y haqiqiy sonlar hamda i belgi uchun :*

1) $x+0\cdot i=x$, $0+i\cdot y=iy$, $1\cdot i=i$, $-1\cdot i=-i$,

2) *faqat* $x=x_1$, $y=y_1$ *bo'lgandagina* $x+yi=x_1+y_1i$ *boladi,*

3) $(x+yi)\pm(x_1+y_1i)=(x\pm x_1)+(y\pm y_1)i$,

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1i)=(x\cdot x_1-y\cdot y_1)+(x\cdot y_1+x_1\cdot y)i$

5) $\dfrac{x+yi}{a+bi}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}+\dfrac{ay-bx}{a^2+b^2}i$

munosabatlar o'rinli bo'lsa, u holda $x+yi$ *ifodaga* ***kompleks son*** *deyiladi.*

1) va 4) shartlardan: $i^2=i\cdot i=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$ *va h.k.*

$i=\sqrt{-1}$ *belgini odatda mavhum birlik deyiladi.*

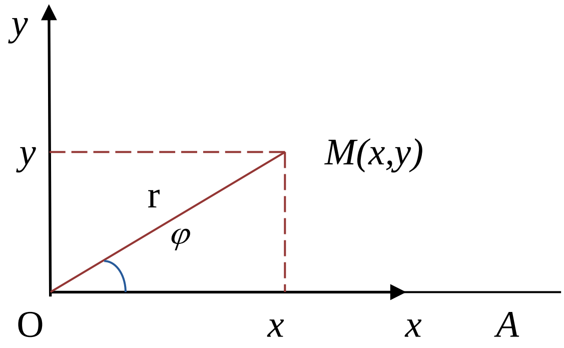
$x+yi$ *kompleks sonda x – kompleks sonning haqiqiy qismi Re(z) , yi - – kompleks sonning mavhum qismi Im(z) deyiladi.*

$x+yi$ *va* $x-yi$ *o'zaro qo'shma kompleks sonlar deyiladi.*

Kompleks sonlarni qo'shish, ayirish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish ko'phadlar ustidagi kabi bajariladi. Bo'lish va ildiz chiqarish amallari esa mos ravishda ko'paytirish va darajaga ko'tarish amallariga teskari amallar kabi aniqlanadi.

Kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi

$x+yi$ kompleks son $(x;y)$ haqiqiy sonlar jufti bilan aniqlanadi.Shuning uchun $x+yi$ kompleks son tekislikdagi $M(x;y)$ nuqta yoki uning $r=\overrightarrow{OM}$ radius - vektori bilan ifodalanadi.



Bu vektorning uzunligi $r=\sqrt{x^2+y^2}$ $-$kompleks sonning moduli, bu vector bilan Ox o'q orasidagi φ - burchak kompleks sonning argumenti deyiladi.

$x=r\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$ *bo'lgani uchun* $x+y\cdot i=r\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ *boladi va bu ifodaga kompleks sonning trigonometrik ko'rinishi deyiladi.*

Trigonometrik ko'rinishidagi kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lish.

$z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$, $z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2)$ berilgan bo'lsa, u holda

$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2))$, $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\left(\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)\right).$

$z_1=x_1+y_1\cdot i=r_1\cdot(\cos\varphi_1+i\cdot\sin\varphi_1)$, $z_2=x_2+y_2\cdot i=r_2\cdot(\cos\varphi_2+i\cdot\sin\varphi_2),...,z_n=x_n+y_n\cdot i=$
$=r_n\cdot(\cos\varphi_n+i\sin\varphi_n)$

$z_1\cdot z_2\cdot...\cdot z_n=r_1\cdot r_2\cdot...\cdot r_n(\cos(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)+i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n))$.

1.4.2. Muavr formulasi

Agar $z_1=z_2=...=z_n=z=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ bolsa, u holda
$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi)$ munosabatni hosil qilamiz.

Bu formulaning r = 1 bo'lgandagi ko'rinishiga Muavr formulasi deyiladi:

$$(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\cdot\sin n\varphi.$$

Xuddi shu kabi $\left(\frac{1}{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}\right)^n=r^{-n}(\cos n\varphi-i\cdot\sin n\varphi).$

Kompleks sondan ildiz chiqarish

$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, bu yerda $k=0,1,2,\dots,n-1$.

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$ - Eyler formulasi deyiladi.

Misol. z = -2+2i . a) $z^4=?$ $b)$ $\sqrt[3]{z}$.

Yechish. a) $r=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\varphi=\pi+arctg\frac{2}{-2}=\frac{3\pi}{4}$.

$$z^4=(2\sqrt{2})^4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^4=64\left(\cos 4\cdot\frac{3\pi}{4}+i\sin 4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=64(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=64(-1+0)=-64.$$

b) $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{-2+2i}=\sqrt[3]{\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right), k=0,1,2.$

$k=0\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=1+i.$

$k=1\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$k=2\ da\ \sqrt[3]{z}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}+1}{2}.$

Algebraning asosiy teoremasi[1]

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ − kompleks sonlar maydonidagi n- darajali ko’phad bo’lsin.

***Ta’rif*.** *Agar x ning* α *son qiymatida* $f(x)$ *ko’phad nolga aylansa, u holda* α *soni* $f(x)$ *ko’phadning ildizi deyiladi.*

Demak, $x=\alpha$ son $f(x)$ ko’phadning ildizi bo’lsa $f(\alpha)=0$ bo’ladi.

Teorema (Bezu teoremasi). $f(x)$ *ko’phadni* $x-\alpha$ *ga bo’lgandagi qoldig’i* $f(\alpha)$ *ga teng.*

Teorema. $x=\alpha$ *son* $f(x)$ *ko’phadning ildizi bo’l ishi uchun u* $x-\alpha$ *ga qoldiqsiz bo’linishi zarur va yetarli.*

Teorema (Algebraning asosiy teoremasi). *Kompleks sonlar maydonida nolinchi darajadan yuqori darajali har bir* $f(x)$ *ko’phadning eng kamida bitta kompleks ildizi bor.*

Teorema. *Kompleks sonlar maydonida n - darajali $f(x)$ ko'phadning n ta ildizi bor.*

$f(x)=a_0\cdot(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$ ifoda ko'phadning chiziqli ko'paytuvchilarga yoyilmasi deyiladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phad uchun $x+yi$ kompleks son ildiz bo'lsa, u holda $x-yi$ qo'shma kompleks son ham ildiz bo'ladi $(y\neq 0)$.

Haqiqiy sonlar maydonidagi $f(x)$ ko'phadning kompleks ildizlari soni faqat juft bo'lishi mumkin.

Haqiqiy sonlar maydonidagi juft daragali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat juft bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonida toq daragali $f(x)$ ko'phadning haqiqiy ildizlari soni faqat toq bo'la oladi.

Haqiqiy sonlar maydonidagi har bir $f(x)$ ko'phadni shu maydondagi birinchi va ikkinchi darajali ko'phadlar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash mumkin.

1. SH.SHarahmetov, O.Qurbanov, "Iqtisodchilar uchun matematika" O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.

NATIJA

Misol sifatida eng sodda misollar bo'lgan

a) $f(x)=x^3-8$

b) $f(x)=x^4-16$

c) $f(x)=x^8-196$

ko'phadlarni ildizlarini topaylik

Yechish: agar biz kompleks sonlarga doir ma'lumotlarga ega bo'lmasak bu ko'phadlarni ildizlarini uni nolga tenglab x ning qiymatlarini topamiz

a) $f(x)=x^3-8$, $x^3-8=0$ tenglamani echib $x=2$

b) $f(x)=x^4-16$, $x^4-16=0$ tenglamani echib $x_1=2$, $x_2=-2$

c) $f(x)=x^8-196$, $x^8-196=0$ tenglamani echib $x_1=2$, $x_2=-2$

ko'rinisdagi haqiqiy ildiz javoblarni olamiz.

Ko'phadlarning hossasiga ko'ra a) ko'phadimizning darajasi 3 ga teng, demak 3 ta javob chiqishi kerak; b) ko'phadimizning darajasi 4 ga teng, demak 4 ta javob chiqishi kerak; c) ko'phadimizning darajasi 8 ga teng, demak 8 ta javob chiqishi kerak; ammo bizning qo'llagan *usulimizda bu qoidallar bajarilmayapdi. Keling edi shu misollarimizni kompleks sonlarga doir ma'lumotlarga ega bo'lgan holda ishlab ko'ramiz*[2].

$$a)\ x^3-8=0,\ x^3=8,\qquad x=\sqrt[3]{8}\left(cos\frac{2\pi k}{3}+isin\frac{2\pi k}{3}\right),k=0,1,2$$

$$k=0,\ \ x_1=\sqrt[3]{8}\,(cos\tfrac{0}{3}+isin\tfrac{0}{3})=2$$

$$k=1,\ \ x_2=\sqrt[3]{8}\,(cos\tfrac{2\pi}{3}+isin\tfrac{2\pi}{3})=2(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}i)=-1+\sqrt{3}i$$

$$k=2,\ \ x_3=\sqrt[3]{8}\,\left(cos\tfrac{4\pi}{3}+isin\tfrac{4\pi}{3}\right)=2\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1-\sqrt{3}i$$

$$b)\ x^4-16=0,\ x^4=16,\qquad x=\sqrt[4]{16}\left(cos\frac{2\pi k}{4}+isin\frac{2\pi k}{4}\right),k=0,1,2,3$$

$$k=0,\ \ x_1=\sqrt[4]{16}\,(cos\tfrac{0}{4}+isin\tfrac{0}{4})=2$$

$$k=1,\ \ x_2=\sqrt[4]{16}\,(cos\tfrac{2\pi}{4}+isin\tfrac{2\pi}{4})=2(0+1i)=2i$$

$$k=2,\ \ x_3=\sqrt[4]{16}\,\left(cos\tfrac{4\pi}{4}+isin\tfrac{4\pi}{4}\right)=2(-1-0i)=-2$$

$$k=3,\ \ x_4=\sqrt[4]{16}\,\left(cos\frac{6\pi}{4}+isin\frac{6\pi}{4}\right)=2(0-1i)=-2i$$

$$c)\ x^8-196=0,\ x^8=196,\qquad x=\sqrt[8]{196}\left(cos\frac{2\pi k}{8}+isin\frac{2\pi k}{8}\right),$$
$$k=0,1,2,3,4,5,6,7$$

$$k=0,\ \ x_1=\sqrt[8]{196}\,(cos\tfrac{0}{8}+isin\tfrac{0}{8})=2$$

$$k=1,\ \ x_2=\sqrt[8]{196}\,(cos\tfrac{2\pi}{8}+isin\tfrac{2\pi}{8})=2\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}+\tfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

2. Данко П.Е. и др. "Высшая математика в упражнениях и задачах." Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 1998.

$$k=2,\ \ x_3=\sqrt[8]{196}\,\left(cos\tfrac{4\pi}{8}+isin\tfrac{4\pi}{8}\right)=2(0+1i)=2i$$

$$k=3,\ \ x_4=\sqrt[8]{196}\,\left(cos\frac{6\pi}{8}+isin\frac{6\pi}{8}\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$$

$$k=4,\ \ x_5=\sqrt[5]{196}\,\left(cos\tfrac{8\pi}{8}+isin\tfrac{8\pi}{8}\right)=2(-1+0i)=$$
$$-2$$

$$k = 5,\ x_5 = \sqrt[5]{196}\left(cos\frac{8\pi}{8} + isin\frac{8\pi}{8}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$
$$k = 6,\ x_5 = \sqrt[5]{196}\left(cos\frac{8\pi}{8} + isin\frac{8\pi}{8}\right) = 2(0 - 1i) = -2i$$
$$k = 7,\ x_5 = \sqrt[5]{196}\left(cos\frac{8\pi}{8} + isin\frac{8\pi}{8}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

Ushbu ishda kompleks sonlardan foydalanib ko'phadning ildizlarini hisoblashni ko'rib o'tdik. Tarifga ko'ra n-chi darajali ko'phad n ta ildizga ega bo'lishi kerak. Bu topilgan ildizlarni grafik ko'rinishda ham ifodalash mumkin. Ya'ni R^2 Dekart koordinatalar sistemasida OX o'qini Re(z), OY o'qini Im(z) bilan almashtiramiz. a) misoldagi 3 ta ildizni topib ularni birlashtirsak muntazam uch burchakni, b) misoldagi 4 ta ildizni topib ularni birlashtirsak muntazam to'rt burchakni, c) misoldagi 8 ta ildizni topib ularni birlashtirsak muntazam sakkizt burchakni hosil qilamiz.

XULOSA

C kompleks sonlar to'plami o'z ichiga: N-natural sonlar to'plamini, Z-butun sonlar to'plamini, Q-ratsional sonlar to'plamini, R-haqiqiy sonlar to'plamini oladi. Demak n-chi darajali ko'phad ildizlarini hisoblaganda kompleks sonlardan foydalansak n-ta ildizga ega bolamiz. Kompleks sonlarni fizika sohasida ya'ni zanjirdagi qarshiliklarni hisoblaganda ahamiyati kattadir. Hozirgi paytda kundalik hayotimizning barcha javhalarida raqamlashtirildan tehnologiyalardan foydalanamiz. Bu tehnologiyalarni ishlab chiqarishda mikro protsessorlar, integral protsessorlar qo'llaniladi. Protsessorlarni yaratish jarayonida, undagi qarshiliklarni hisoblashada juda kichik qarshiliklarni ham etiborga olishga to'g'ri keladi. Aynan shu hisob kitoblarni aniq hisoblashda fizik olimlarimiz kompleks sonlardan foydalanadilar. Bu esa ko'mpleks sonlar bizning kundalik hayonimizda o'zining o'rniga ega ekanligini ko'rsatadi.

REFERENCES

1. SH.SHarahmetov, O.Qurbanov, Iqtisodchilar uchun matematika, ISBN 978-9943-07-554-2, O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2017.
2. F.Rajabov, S.Masharipova, R.Madraximov. Oliy matematika. "Turon iqbol" nashriyoti. Toshkent 2007.
3. B.A.Shoimqulov, T.T.Tuychiyev, D.H.Djumaboyev. Matematik analizdan mustaqil ishlar. "O'zbekiston faylasuflar milliy jamiyati" nashriyoti. Toshkent 2008.

4. D.G’.Raximov. Oliy matematika. “O’AMBNT” nashriyoti. Toshkent 2003.
5. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть I, II. Учебное пособие. М.: «Высшая школа», 1998.
6. F.Rajabov, S.Masharipova, R.Madraximov. Oliy matematika. “Turon iqbol” nashriyoti. Toshkent 2007.
7. B.A.Shoimqulov, T.T.Tuychiyev, D.H.Djumaboyev. Matematik analizdan mustaqil ishlar. “O’zbekiston faylasuflar milliy jamiyati” nashriyoti. Toshkent 2008.
8. D.G’.Raximov. Oliy matematika. “O’AMBNT” nashriyoti. Toshkent 2003.
9. Nasriddinov, G‘. Iqtisodiy-matematik modellar va usullar: darslik/ G ‘. N asritdinov; 0 ‘zbekiston Respublikasi Oliy va o ‘rta maxsus ta’lim vazirligi. — T.: 0 ‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti, 2019.
10. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. Introduction to Applied Linear Algebra**,** ISBN 978-1-316-51896-0 Hardback, © Cambridge University Press 2018. (Ushbu kitob universitet ARMda PDF variantda mavjud).
11. Dan A Simovici. Linear Algebra Tools for Data Mining, University of Massachusetts, USA Copyright © by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd 2012. (Ushbu kitob universitet ARMda PDF variantda mavjud).
12. Dejen Ketema, Applied Mathematics, Arba Minch University, Department of Mathematics, 2016. (Ushbu kitob universitet ARMda PDF variantda mavjud).
13. Андропов А.М., Копытов Е.А. Гринглаз Л.Я. Теория вероятностей и математическая статистика, ISBN5-94723-615-X, Питер, 2004. (Ushbu kitob universitet ARMda PDF variantda mavjud).
14. Ismailov A. A. Ishniyazov A.I. Iqtisodiy tahlilning matematik usullari va bashoratlash. TDIU 2007
15. Kurpayanidi, K., Ilyosov, A. (2020) Problems of the use of digital technologies in industry in the context of increasing the export potential of the country// ISJl Theoretical & Applied Science. p. 113-117.
16. G’.M. Porsaev, B.Sh. Safarov, D.Q. Usmanova. Raqamli iqtisodiyot asoslari 2020-yil.