ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ СОҲАДА ИССИҚЛИК ТЎЛҚИНЛАРИ ТАРҚАЛИШИ МАСАЛАНИ ЕЧИШ

М. Х. Эшмуродов
Самарқанд давлат архитектура-қурилиш университети, катта ўқитувчиси
m.eshmurodov@samdaqi.edu.uz

АННОТАЦИЯ

Тўғри бурчакли соҳада иссиқлик тўлқинлари тарқалиши масалани ечишда жисмнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, зичлиги ва келтирилган иссиқлик сиғими ўзгармас қийматларга эга деб қаралади. Масалани ечишда тўғри чизиқлар усулидан фойдаланилади. Бу усулнинг асосий ютуғи машинанинг яхлитлаш доирасида чекли айирмали тенгламаларнинг аниқ ечимини олишдир.

Ушбу мақола доирасида биз тўғри бурчакли соҳа чегарасида ҳарорат кескин сакраб ўзгариши масаласини қараймиз.

Иссиқлик узатиш масалаларида умумлашган функциялардан фойдаланиш ҳам сифатий, ҳам миқдорий натижаларни олиш имконини беради.

Калит сўзлар: Чекли айирмалар усули, Иссиқлик узатиш, Иссиқлик сиғими, Фундаментал матрица.

КИРИШ

Математик физиканинг битта ва кўп ўлчовли тенгламаларини сонли ечиш учун ишлатиладиган чекли-айирмалар усулининг мавжуд бўлган кўплаб модификациялари тақрибий усуллардир. Бир томондан, бу тенглик ва чегаравий шартларининг маълум бир аниқлик тартибида яқинлашиши билан боғлиқ. Иккинчи томондан, чекли айирмали тенгламаларнинг ўзини ечиш тақрибий характерга эга, чунки ажратиш, ўзгарувчан йўналишлар, предиктор-корректор ва бошқа усулларлар аниқ ечимни емас, балки унга бирор яқинлашишни беради.

Ҳарорат катта градиентининг кўп маротаба такрорланиши қаттиқ жисмнинг маълум қисмларида қолдиқ деформациянинг тўпланишига олиб келади. Натижада, биринчи навбатда ёриқлар пайдо бўлади, кейин эса жисм яхлитлигини йўқотади. Қаттиқ жисм механикасида бу жараён мураккаб математик модель доирасида ўрганилади, бунда деформация тензори маълум компонентлар билан бир қаторда жисмнинг иссиқликдан кенгайиши омилини ҳисобга олган ҳолда тузилади. Ушбу мақола доирасида биз тўғри бурчакли соҳа чегарасида ҳарорат кескин сакраб ўзгариши масаласини қараймиз.

АДАБИЁТЛАР ТАҲЛИЛИ ВА МЕТОДОЛОГИЯ

Иссиқлик узатиш масалаларида умумлашган функциялардан фойдаланиш ҳам сифатий, ҳам микдорий натижаларни олиш имконини беради. Мақоланинг материалини баён этишда бундай функция сифатида ζ нисбий–ортиқча ҳароратдан фойдаланилган, координаталар эса l_x қисмнинг узунлигини жалб қилган ҳолда ўлчовсиз шаклга келтирилган. Шу муносабат билан, ҳисоблашларда $\left(l_x, l_y\right)$ ўлчамлари бўлган тўғри тўртбурчак $\left(1, l\right)$ ўлчамлари билан олинади. Жисмнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти, зичлиги ва келтирилган иссиқлик сиғими ўзгармас қийматларга эга.

Иссиқлик узатиш тенгламасининг томонларини a^2 иссиқлик тарқалиш коэффициенти ва l_x узунлик масштабига бўлишда қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + f'\left(x, y, t\right),$$

Бу ерда $\zeta\left(x, y, t\right)$ – нисбий-ортиқча ҳарорат; $f'\left(x, y, t\right)$ – материалнинг иссиқлик ўтказиш коэффициенти бўйича келтирилган ҳисоблаш соҳасидаги иссиқлик манбаи/ютилиши қуввати; t – иссиқлик ўтказиш коэффициентининг реал вақтга кўпайтмаси, $м^2$ ўлчовга эга.

Бошланғич шарт бўлиб $\zeta\left(x, y, 0\right) = \zeta^0\left(x, y\right)$, чегаравий шартлар бўлиб

$$\zeta\left(0, y, t\right) = \mu_{x0}\left(y\right), \quad \zeta\left(1, y, t\right) = \mu_{xl}\left(y\right), \; \zeta\left(x, 0, t\right) = \mu_{y0}\left(x\right), \; \zeta\left(x, l, t\right) = \mu_{yl}\left(x\right)$$

хизмат қилади.

Чегаравий ва бошланғич шартлар нолга тенг ёки нолга тенг бўлмаслиги мумкин. Аммо бизни жисмдаги юқори иссиқлик кучланишлари билан ажралиб турадиган иссиқлик тўлқинлари қизиқтиради.

Масалани ечиш учун тўғри чизиқлар усулидан фойдаланилади. h_x, h_y, τ қадамлар ва $i = 0..N_x + 1$, $j = 0..N_y + 1$, $n = 0..N_t$ индекслар билан координаталар ва вақт бўйича текис тўр киритилади.

Тенгламани x ўқи бўйлаб иккинчи тартибли аниқликдаги схема билан аппроксимациялаб,

$$\frac{\partial Z_j}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} A_j^{(x)} Z_j + \frac{\partial^2 Z_j}{\partial y^2} + F_j \qquad (1)$$

матрицали тенглама тузилади, бу ерда

$$A_j^{(x)} = \left\| \begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|_N , \qquad (2)$$

$$Z_j = \left(\zeta_{1,j}^{n+1},\ \zeta_{2,j}^{n+1}, \dots,\ \zeta_{N_x-1,j}^{n+1},\ \zeta_{N_x,j}^{n+1} \right)^T,$$

$$F_j = \left(f_{1,j}'^{n} + \frac{\mu_{0,j}^{n+1}}{h_x^2},\ f_{2,j}'^{n}, \dots,\ f_{N_x-1,j}'^{n},\ f_{N_x,j}'^{n} + \frac{\mu_{N_x+1,j}^{n+1}}{h_x^2} \right)^T =$$

$$= \left(f_{1,j},\ f_{2,j}, \dots,\ f_{N_x-1,j},\ f_{N_x,j} \right)^T.$$

Ушбу матрица тенгламасидан битта тенгламани ажратиб олиш учун (1) ни чапдан $b_{s,p}^{(x)} = (-1)^{s+p} \sqrt{\frac{2}{N_x+1}} \sin \frac{\pi s p}{N_x+1}$ элементлари бўлган B_x фундаментал матрицанинг тескари матрицасидан иборат $A_j^{(x)}$ матрица хос векторлари элементлари бўлган B_x^{-1} матрицага кўпайтирамиз. $A_j^{(x)} = B_x \Lambda_x B_x^{-1}$ ни ҳисобга олган ҳолда, бу ерда Λ_x – элементлари $A_j^{(x)}$ матрица хос қийматлари $\lambda_s^{(x)} = -2\left(1 + \cos \frac{\pi s}{N_x+1}\right)$дан иборат диагонал матрицани ифодалайди, матрица тенглама қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\frac{\partial \overline{Z}_j}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} \Lambda_x \overline{Z}_j + \frac{\partial^2 \overline{Z}_j}{\partial y^2} + \overline{F}_j,$$

бу ерда $\overline{Z}_j = B_x^{-1} Z_j = B_x Z_j,\ \overline{F}_j = B_x^{-1} F_j = B_x F_j$.

Охирги матрица тенгламадан

$$\frac{\partial \tilde{\zeta}_{i,j}}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} \lambda_i^{(x)} \tilde{\zeta}_{i,j} + \frac{\partial^2 \tilde{\zeta}_{i,j}}{\partial y^2} + \tilde{f}_{i,j}$$

тенглама ажратилади.

Ушбу тенгламаларнинг чегаравий шартлари бўлиб ўзгартирилган $\tilde{\mu}_{i,0}=\tilde{\zeta}_{i,0}=\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)}\mu_{p,0}^{n+1}$, $\tilde{\mu}_{i,N_y+1}=\tilde{\zeta}_{i,N_y+1}=\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)}\mu_{p,N_y+1}^{n+1}$ чегаравий шартлар хизмат қилади.

Юқорида баён қилинган процедурани B_y ва Λ_y матрицалари ёрдамида такрорлаб, алоҳида тенгламаларга келамиз:

$$\frac{\partial\breve{\zeta}_{i,j}}{\partial t}=\frac{1}{h_x^2}\lambda_i^{(x)}\breve{\zeta}_{i,j}+\frac{1}{h_y^2}\lambda_j^{(y)}\breve{\zeta}_{i,j}+\breve{f}_{i,j}$$

Бу ердан биз вақт бўйича ҳосиланинг дискрет ифодасига ўтамиз ва янги киритилган фунцияларнинг қийматларини топамиз:

$$\breve{\zeta}_{i,j}^{n+1}=\frac{\breve{\zeta}_{i,j}^{n}+\tau_n\breve{f}_{i,j}^{n+1}}{1-\tau_n\left(\frac{\lambda_i^{(x)}}{h_x^2}+\frac{\lambda_j^{(y)}}{h_y^2}\right)}. \quad (3)$$

Яна киритилган функция учун бошланғич шартни шакллантириш $\breve{\zeta}_{i,j}^{0}=\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)}\sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)}\zeta_{p,q}^{0}$ формула бўйича, нисбий-ортиқча ҳароратга тескари ўтиш $\zeta_{i,j}^{n+1}=\sum_{p=1}^{N_x} b_{i,p}^{(x)}\sum_{q=1}^{N_y} b_{j,q}^{(y)}\breve{\zeta}_{p,q}^{n+1}$ бўйича амалга оширилади.

Тақдим этилган материал асосида дастур тузилди ва ҳисоблаш тажрибаси ўтказилди. Ҳисоблаш тажрибасининг баъзи натижаларига тўхталиб ўтамиз.

1-масала сифатида

$$\theta^0(x,y)=0,\ \mu_{x0}(y)=0,\ \ \mu_{xl}(y)=0,\ \ \mu_{y0}(x)=0,\ \ \mu_{yl}(x)=1$$

чегаравий шартлар бўлган ҳолни қараймиз. Яъни, $t=0$ дан бошлаб $y=1$ чегарада 1 ҳарорат ўрнатилади. Бошланғич ҳарорат ва бошқа чегаралардаги ҳарорат нолга тенг.

Ён деворлардаги ноль чегаравий шартлари иссиқлик тўлқинининг олд қисмини аста-секин торайтиради ва юқори ҳароратнинг ўзига хос "тиллари" ни ҳосил қилади. Бу омил $\mu_{y0}(x)=1$, $\mu_{yl}(x)=1$ да қарама-қарши тарқаладиган тўлқинларнинг тарқалишида аниқроқ ифодаланади.

Шунга ўхшаш ҳисоб-китоблар ҳароратнинг $x=0$ чегарадаги қиймати ва $y=1$ чегаралар билан боғлиқ бўлган ҳол учун ҳам амалга оширилди.

Натижаларнинг кичик вақт қадамида тескари тўлқинларни кўриш мумкин.

Ҳисоблаш натижаларини ҳисоблаш соҳасида изотермалар кўринишида тақдим этиш юқори иссиқлик кучланиш соҳаларини ажратиб кўрсатиш имконини беради. Улар изочизиқларнинг қуюқлашиши билан характерланади.

ХУЛОСА

Хулоса қилиб шуни таъкидлаймизки, апроксимация аниқлиги $O\left(\tau + h_x^2 + h_y^2\right)$. Уни ошириш мумкин. Аммо бу усулнинг асосий ютуғи машинанинг яхлитлаш доирасида чекли айирмали тенгламаларнинг аниқ ечишини олишдир.

Усул эллиптик ва гиперболик тенгламаларга қўлланилиши мумкин.

Эллиптик тенглама учун (3) ечим $\breve{\zeta}_{i,j} = -\dfrac{\breve{f}_{i,j}^{n+1}}{\lambda_i^{(x)} / h_x^2 + \lambda_j^{(y)} / h_y^2}$, гиперболик тенглама учун эса $\breve{\zeta}_{i,j}^{n+1} = \dfrac{2\breve{\zeta}_{i,j}^{n} - \breve{\zeta}_{i,j}^{n-1} + \tau_n \breve{f}_{i,j}^{n+1}}{1 - \tau_n\left(\lambda_i^{(x)} / h_x^2 + \lambda_j^{(y)} / h_y^2\right)}$ кўринишни олади, яъни усул кенг қўлланиш соҳасига эга.

REFERENCES

1. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально–разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
3. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Численно-аналитические методы решения задач на собственные числа и вектора для метода прямых на прямоугольных областях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №4(10). – С. 76-83.
4. Равшанов Н., Шарипов Д.К. Модель и численный алгоритм для прогнозирования процесса распространения вредных веществ в атмосфере. – Проблемы информатики и энергетики, Ташкент. 2011, №4. – С. 3-10.
5. Каримов И.К., Хужаев И.К., Хужаев Ж.И. Применение метода прямых при решении одномерного уравнения параболического типа при граничных условиях первого и второго родов // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. № 1(21). С. 78-92. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-21-1-78-92