ЁРДАМЧИ МАТРИЦАЛАРНИ КИРИТИШ ВА УЛАРНИНГ ЭЛЕМЕНТЛАРИНИ АНИҚЛАШ УСУЛЛАРИ

Масъуджон Хикматиллаевич Эшмуродов
Самарқанд давлат архитектура-қурилиш университети, катта ўқитувчиси
m.eshmurodov@samdaqi.edu.uz

АННОТАЦИЯ

Ихтиёрий чизиқли чегаравий шартларга эга масалани Дирихле масаласига келтириш йўли билан тўғри чизиқлар методини қўллаш усули ишлаб чиқилган. Изланаётган функциянинг қийматлари чегараларда берилган деб фараз қилиб, Дирихле масаласини ечиш амалга оширилади. Функциянинг фараз қилинган қийматларини чегара тугунларида функциянинг янги топилган қийматлари билан чегара шартларининг яқинлашувларига мувофиқ равишда мослаштириш орқали изланаётган функцияларнинг чегаралардаги ҳақиқий қийматлари топилади. Кейин улар тенглама ва битта координата учун чегаравий шартлар яқинлашиши иккинчи тартибини таъминлаган ҳолда тўғри чизиқлар усулини амалга оширишда фойдаланилди.

Калит сўзлар: Чекли айирмалар усули, Иссиқлик узатиш, Дирихле масаласи, Хос сонлар ва векторлар.

$\frac{dU}{dt}=\frac{a^2}{h^2}AU+F$ (1) тенглама ҳадларига вектор-устун шаклини бериш учун уч диагоналли матрицани кўпайтма кўринишида ифодалаймиз.

$A=V\Lambda V^{-1}$(2) ни ўнгдан V га кўпайтириб $VA=V\Lambda$ тенгликни оламиз.

Тенгликнинг чап ва ўнг қисмларидаги ифодаларнинг s-устунларини ҳисоблаймиз. Натижани очиш

$$\begin{cases}\left(-2-\lambda_s-2\alpha_0 h\right)v_{0,s}+2v_{1,s}=0,\\ v_{p-1,s}+\left(-2-\lambda_s\right)v_{p,s}+v_{p+1,s}=0 \quad агар \quad p=1..N-1,\\ v_{N-1,s}+\left(-2-\lambda_s\right)v_{N,s}=0.\end{cases} \tag{3}$$

тенгламалар системасини беради. (3) система ечимнинг нотривиаллик шарти $D'_{N+1}\left(\lambda_s\right)=0$ билан тўлдирилади. Бу ерда

$$D'_{N+1}(\lambda_s)=\begin{vmatrix} -2-\lambda_s-2\alpha_0 h & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2-\lambda_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2-\lambda_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2-\lambda_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2-\lambda_s \end{vmatrix}_{N+1}.$$

$0\le|\lambda_s|\le 4$ деб фараз қилиб, $-2-\lambda_s=2\cos\theta_s$ белгилаш киритилади. У ҳолда детерминант қуйидаги кўринишни олади:

$$D'_{N+1}(\theta_s)=(2\cos\theta_s-2\alpha_0 h)D_N(\theta_s)-2D_{N-1}(\theta_s). \tag{4}$$

Бу ерда биз

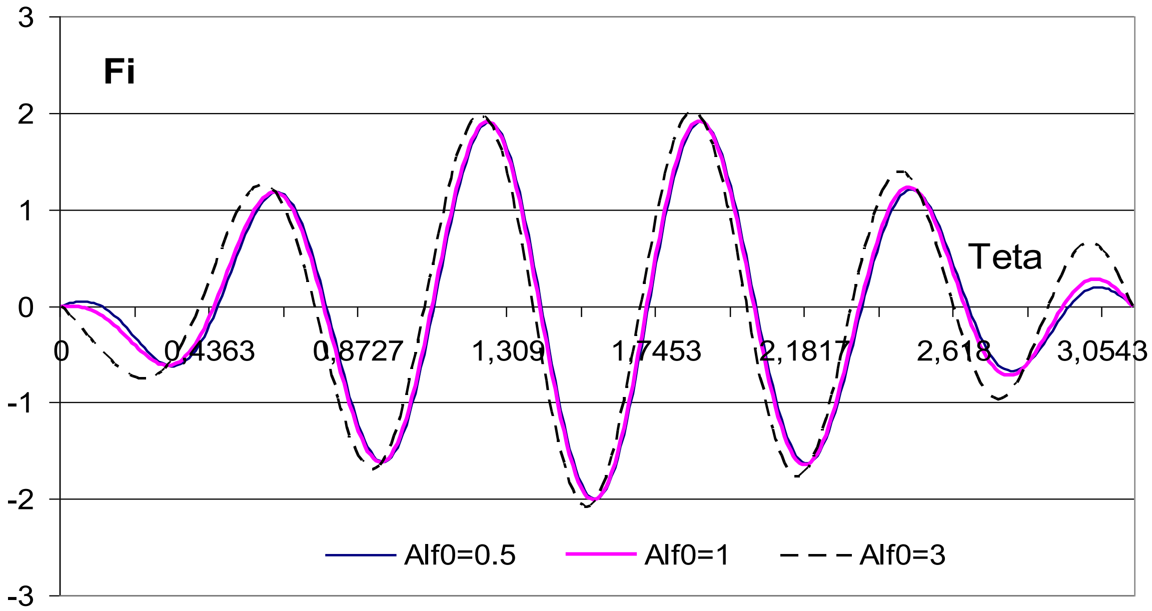
$$D_n(\theta_s)=\begin{vmatrix} 2\cos\theta_s & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta_s & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta_s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta_s & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta_s \end{vmatrix}_n=\frac{\sin(n+1)\theta_s}{\sin\theta_s}$$

ёрдамчи детерминантдан фойдаландик. $\sin\theta_s\neq 0$ шартида (4) шакл алмаштиришлардан сунг $\varphi(\theta_s)=0$ кўринишни олади. Бу ерда

$$\varphi(\theta_s)=\sin(N+2)\theta_s-2\alpha h\sin(N+1)\theta_s-\sin N\theta_s. \tag{5}$$

Ушбу функция $\theta_s=0$ ва $\theta_s=\pi$ да ноль қийматга эга ва $(0;\pi)$ оралиқда эса каррали илдизга эга эмас (2.1-расм). $\theta_s=0$ ва $\theta_s=\pi$ чегаралардан $\delta\ (<<1)$ кичик масофада функция мос равишда $\varphi(\delta)=2\delta(1-\alpha_0 l)$ ва $\varphi(\pi-\delta)=(-1)^{N+1}2\delta(1+\alpha_0 l)$ қийматларга эга.

Ҳисоблашларда одатда $N+1$ жуфт қиймат деб олинади. У ҳолда $\varphi(\pi-\delta)>0$, яъни $\varphi(\theta)$ функциянинг графиги $\theta=\pi$ да ўсувчи. $\alpha l<1$ ва $\theta_0=0$ да ҳам функциянинг графиги ўсувчи Бундан келиб чиқадики, бу шартларда $\varphi(\theta)=0$ тенгламанинг ечимлари сони жуфт бўлиб, ҳисоб-китоблар кўрсатганидек, барча θ_s илдизлар (5) тенгламадан аниқланади.



1-расм. $\varphi(\theta)$ **функциянинг** $N=9$ **ва** α_0 **нинг турли қийматларидаги графиклари**

$\varphi(\theta)$ функциянинг $l=1$, $N=9$ даги графиклари, $\alpha_0 h$ комплекснинг қийматлари ўсганда манфий қийматдан бошлаб тенгламанинг биринчи θ_0 илдизи чапга силжийди ва $\alpha_0 l=1$ да $\theta=0$ билан мос тушади. Шу муносабат билан, $\alpha_0 l=1$ да $\theta_0=0$ илдиз қабул қилинади. Мос равишда, $\cos\theta_0=1$ ва $\lambda_0=-4$. Ҳисоблашлар шуни кўрсатдики, $\alpha l>1$ да $\varphi(\theta)=0$ тенгламанинг биринчи илдизи θ_0 йўқолади, яъни биз фойдаланган алмаштириш ўз маъносини йўқотади, чунки $0\le|\lambda_0|\le 4$ шарт бажарилмайди.

Шуни таъкидлаш керакки, тўғри чизиқлар усулида учинчи жинсли чегаравий шартларнинг ўзига хос хусусияти хос сонларни аниқлашда сонли усулдан фойдаланиш ҳисобланади. Яъни, агар иккинчи жинсли аралаш ёки бир хил чегаравий шартларда α коэффициент, албатта, чекли-айирмали тенглама ўнг қисмида пайдо бўлса, у ҳолда учинчи турдаги чегара шартларда у ўтиш матрицасининг ўзида иштирок этади ва бу хусусий қийматлар учун масалани ечишда сонли усулдан фойдаланишни шартлайди.

Бошқа томондан, биринчи ва иккинчи жинсли чегаравий шартларнинг аралаш ёки бир хил чегаравий шартларида $-2-\lambda_s=2\cos\theta_s$ алмаштириш ўтиш матрицасининг барча хос қийматларини аналитик усулда аниқлашни таъминлайди, у ҳолда учинчи жинсли чегара шартларнинг маълум ҳолларида

$0 \le |\lambda_S| \le 4$ шарт бажарилмаганлиги сабабли илдиз йўқолади. Лекин бу хос қийматлар масаласини ечишнинг тригонометрик усулидан воз кечиш учун сабаб эмас.

Шундай қилиб, аввал тригонометрик тенгламани $(0;\pi)$ оралиқда ечамиз. Буни ўнг учидан, яъни $\theta = \pi$ дан бошлаш маъқулроқ. $\theta_p = \pi$ (ўнг) ва $\theta_l = \pi - \Delta$ (чап) чегаралари бўлган кесмани ажратамиз ва бу ерда, масалан, $\Delta = \pi / 1000$. Шартли равишда $\varphi(\theta_p) > 0$ деб қабул қиламиз. $\varphi(\theta_l)$ ни ҳисоблаймиз ва $\varphi(\theta_l)\varphi(\theta_p) < 0$ шартнинг бажарилишини текширамиз. Агар у бажарилмаса θ_l ва θ_p сифатида қабул қилинадиган $\theta_l - \Delta$ ва $\theta_p - \Delta$ янги чегараларга эга кейинги кесмага ўтамиз, $\varphi(\theta_p)$ қийматни эса $\varphi(\theta_l)$ билан алмаштирамиз. Яна $\varphi(\theta_l)$ни ҳисоблаймиз ва $\varphi(\theta_l)\varphi(\theta_p) < 0$ шартнинг бажарилишини текширамиз. Ва шундай жараённи шарт бажарилмагунча давом эттирамиз. Шарт бажарилганда, тенгламанинг k-чи илдизи тегишлилик кесмасининг қуйи чегараси сифатида θ_l ни хотирада сақлаймиз, $\varphi(\theta_p)$ ишорасини ўзгартирамиз. Ва $\varphi(\theta)$ функция ишорасининг ўзгариши бўладиган кейинги кесмани қидиришни давом эттирамиз. Ушбу жараён $\theta_l = 0$ га етгунча давом этади.

Натижада $\varphi(\theta)$ функция ўз қиймати ишорасини ўзгартирадиган барча кесмалар ажратилади. Ундан кейин дихатомия усулидан фойдаланиб, ҳар бир илдизнинг қийматларини керакли аниқликда топамиз.

Ушбу ечиш усулини қўллаш $\alpha l < 1$ ҳолда $N+1$ хос қийматларни ва $\alpha l \ge 1$ ҳолда эса N та илдизларни топиш имконини беради. $\alpha l = 1$ ҳолида, юқорида айтиб ўтилганидек, биз $\cos\theta_0 = 1$ ва $\lambda_0 = -4$ деб қабул қиламиз. $\alpha l > 1$ ҳолида эса $\cos\theta_0$ шартли қийматни Виет теоремаси [26] асосида аниқлаймиз. D'_{N+1} детерминантни $c = 2 - \lambda_s$ бўйича ёйиш

$$D'_{N+1} = c^{N+1} + a_1 c^N + \ldots + a_N c + a_{N+1}$$

кўпҳадга олиб келади.

$N+1$ нинг турли хил қийматлари учун ёйилма коэффициентларининг қийматларини ҳисоблаймиз, бу ерда биз $c = 2\cos\theta_s$ ва $\beta = 2\alpha_0 h$ белгилашдан фойдаланамиз:

$$D'_1 = c - \beta,$$

$$D_2' = \begin{vmatrix} c-\beta & 2 \\ 1 & c \end{vmatrix} = c^2 - \beta c - 2,$$

$$D_3' = \begin{vmatrix} c-\beta & 2 & 0 \\ 1 & c & 1 \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = cD_2' - D_1' = c\left(c^2 - \beta c - 2\right) - \left(c - \beta\right) = c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta,$$

$$D_4' = \begin{vmatrix} c-\beta & 2 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{vmatrix} = cD_3' - D_2' =$$

$$= c\left(c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta\right) - \left(c^2 - \beta c - 2\right) = c^4 - \beta c^3 - 4c^2 + 2\beta c + 2,$$

$$D_5' = cD_4' - D_3' = c\left(c^4 - \beta c^3 - 4c^2 + 2\beta c + 2\right) - \left(c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta\right) =$$

$$= c^5 - \beta c^4 - 5c^3 + 3\beta c^2 + 5c - \beta, \ \ldots$$

Умуман олганда, қуйидаги қонуният кузатилади. Биринчидан, тенгламадаги c^N ҳад коэффициенти $a_1 = -\beta$. Виет теоремаси ва киритилган белгилашларга кўра $\sum_{s=0}^{N} c_s = 2\alpha_0 h$ га, $\sum_{s=0}^{N} \cos\theta_s = \alpha_0 h$ га эга бўламиз. Бундан $\cos\theta_0 = \alpha_0 h - \sum_{s=1}^{N} \cos\theta_s$ ва $\lambda_0 = -2 - 2\alpha_0 h + 2\sum_{s=1}^{N} \cos\theta_s$ ларни топиш мумкин.

Иккинчидан, кўпҳаднинг озод ҳади қуйидаги кўринишга эга:

$$a_{N+1} = (-1)^{N+1} \prod_{s=0}^{N} 2\cos\theta_s = \begin{cases} -2\alpha_0 h, & \text{агар} \ \ N+1 = 4m+1, \\ -2, & \text{агар} \ \ N+1 = 4m+2, \\ 2\alpha_0 h, & \text{агар} \ \ N+1 = 4m+3, \\ 2, & \text{агар} \ \ N+1 = 4m. \end{cases}$$

Ундан $\alpha l > 1$ да хос қийматларни топиш натижаларини текшириш учун фойдаланиш мумкин.

Шундай қилиб, $\alpha l < 1$ да A функция ўтиш матрицасининг барча хос қийматлари характеристик тенгламанинг тригонометрик кўринишидан сонли усул билан топилади.

$\alpha l = 1$ да ўтиш матрицасининг биринчи хос қиймати $\lambda_0 = -4$ каби аниқланди, қолган хос қийматлар характеристик тенгламанинг тригонометрик ифодасидан топилди.

A функция ўтиш матрицасининг биринчи хос қийматини аниқлаш учун биз характеристик тенгламанинг кўпҳадли кўриниши ва Виет теоремасидан фойдаландик, қолган хос қийматлар эса характеристик тенгламанинг тригонометрик ифодасини сонли ечиш орқали аниқладик.

REFERENCES

1. Хужаев Ж.И. Алгоритм расчета трехмерного температурного поля хлопка-сырца // Вестник ТашГТУ. - Ташкент, 2014. - № 3 (87). – С. 36-39.
2. КМ Шаимов, МХ Эшмуродов, ИК Хужаев. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ДВИЖУЩИХСЯ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ ТЕПЛА ВНУТРИ ОБЛАСТИ ТЕПЛООБМЕНА//ТУИТ имени М.ал-Хоразми – Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2020.-№1(25).-С. 59-68.
3. M Kh Eshmurodov, K M Shaimov, I Khujaev and J Khujaev. Method of lines for solving linear equations of mathematical physics with the third and first types boundary conditions//Journal of Physics: Conference Series 2131, 2021. -P.1-10.
4. М.Х. Эшмуродов, К.М. Шаимов. ИХТИЁРИЙ ЧИЗИҚЛИ ЧЕГАРАВИЙ ШАРТЛАР УЧУН ПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМАНИ ЕЧИШДА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР УСУЛИНИ ҚЎЛЛАШ АЛГОРИТМИ//Academic Research in Educational Sciences Volume 3 | Issue 11 | 2022. Б. 124-133.
5. М.Х. Эшмуродов. ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ СОҲАДА ИССИҚЛИК ТЎЛҚИНЛАРИ ТАРҚАЛИШИ МАСАЛАНИ ЕЧИШ. Academic Research in Educational Sciences Volume 4 | Issue 1 | 2023. Б. 111-115.
6. I. Khujaev, J Khujaev, M Eshmurodov and K Shaimov. Differential-difference method to solve problems of hydrodynamics. Journal of Physics: Conference Series 1333. 2019. -P. 1-8.