ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ДИФФУЗИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА MATLAB

Мафтуна Фахриддиновна Самиева
Ассистент, кафедра цифровой экономики и информационных технологий,
Ташкентский государственный экономический университет.
samiyevamaftuna29@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается вопрос создания алгоритма «Визуализация процесса диффузии в неоднородной среде с использованием пакета Matlab». Рассматриваемый вопрос относится к вопросам диффузии и относится к разряду текущих вопросов. Представлены асимптотика автомобильных решений диффузионной задачи, численная схема решения диффузионной задачи, графические возможности Matlab, расчетный эксперимент. Задачи этого типа исследовались большинством специалистов для одномерного случая. В нашем случае рассматривается структурированный кейс. Эти задачи относятся к множеству некорректных задач математической физики, и при решении таких задач считается, что решение исходной задачи существует (в физическом смысле), а единственность и условная устойчивость решения задачи доказано во множестве правильности. По этому набору строится приближенный численный алгоритм, соответствующий бесконечно малому изменению заданных данных, не исключающему решение. С помощью стандартных программ получаются численные результаты в Matlab, совместимые с этим алгоритмом, и проверяются в тестах

Ключевые слова: пакет Matlab, процесс диффузии, математическая модель, численный алгоритм, расчетный эксперимент

ABSTRACT

This article considers the issue of creating an algorithm "Visualization of the diffusion process in a non-homogeneous environment using the Matlab package". The issue under consideration is related to diffusion issues and belongs to the category of current issues. Asymptotics of car solutions of the diffusion problem, numerical solution scheme of the diffusion problem, graphical capabilities of Matlab, calculation experiment are presented. Problems of this type have been investigated by most experts for the one-dimensional case. In our case, a structured case is considered. These problems belong to the set of incorrect problems of mathematical physics, and when solving such problems, it is considered that the solution of the initial problem exists (from the physical sense), and the uniqueness and conditional stability of the solution of the problem is proved in the set of correctness. From this set, an approximate numerical algorithm corresponding to an infinitesimal change of the given data that does not exclude the solution is constructed. Using standard programs, numerical results are obtained in Matlab compatible with this algorithm and checked in tests

Keywords: Matlab package, diffusion process, mathematical model, numerical algorithm, computational experiment

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня изучать физические, биологические, химические и другие процессы удобно, поскольку разработаны общие методы решения лежащих в их основе дифференциальных линейных дифференциальных уравнений. В практических задачах во многих случаях реальные физические процессы рассматриваются как нелинейные, и для их корректного описания приходится использовать нелинейные математические модели. [1, 2]

С точки зрения реализации особый интерес представляет изучение класса нелинейных дифференциальных уравнений с неизвестной функцией и ее производной в степенной форме

Широкое распространение в мире математических моделей процессов, представленных квазилинейными параболическими уравнениями и их системами, объясняется их происхождением из фундаментальных законов сохранения (энергии, массы, числа частиц и т. д.). По этой причине два физических процесса, на первый взгляд не имеющих ничего общего (например, теплопроводность в полупроводниках и процессы распространения магнитных полей в средах), описываются одним и тем же уравнением диффузии, заданным разными числовыми параметрами. [3-5]

Одним из актуальных направлений математического моделирования является изучение нелинейных математических моделей различных физических, биологических, химических и других явлений и процессов. В качестве примера могут быть показаны различные физические теории, такие как нелинейная квантовая механика, нелинейная электродинамика и оптика, нелинейная теория плазмы, нелинейная акустика, нелинейная теплопроводность, нелинейная диффузия, механика жидкости и газа, математические модели которых основаны на нелинейных производных дифференциальных уравнения и их системы.

В общем случае основные отличия математических моделей различных процессов, основанных на квазилинейных параболических уравнениях, характеризуют коэффициенты уравнения (коэффициент теплоотдачи, перемещение, мощность источника и текущая энергия), зависящие от величин, определяющих состояние окружающей среды, включа температуру, плотность и магнитное поле

Также, помимо построения устойчивых дифференциальных схем с нелинейными эффектами и визуализации приближенного решения с использованием современных компьютерных технологий, актуальны и методы линеаризации. В математическом моделировании засвидетельствовано, что залогом успеха является проведение вычислительных экспериментов с использованием качественных и аналитических методов автомодельных и приближенно-автомодельных уравнений, а также теории специальных производных уравнений [4, 5,7].

Основным аспектом и сложностью изучаемых математических моделей является неединственность решения, что отличает их от классических задач с единственным решением. Поэтому возникают следующие проблемы:

- Нахождение «хорошего» приближения к каждому решению
- Построить итерационный процесс, который всегда сходится к желаемому решению (подходящее начальное приближение) и обеспечивает достаточную точность.

Все вышеизложенное позволяет сделать вывод об актуальности темы.

АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ И МЕТОДОЛОГИЯ

Предельное влияние скорости диффузионного распространения в нелинейных средах впервые было установлено Я.Б.Зельдовичем, А.С.Команейцем, а позднее Г.И.Баренблаттом, Р.Пэттлом. Этот эффект исследуется для случая, когда начальное распределение (функция) в нелинейном уравнении теплопереноса представляется функцией-образом. А.А.Самарский, В.А.Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. В серии работ Михайлова, М.М.Арипова изучались условия возникновения эффекта распространения тепла с конечной скоростью для уравнения диффузии с источником и поглощением, а также градуированной нелинейностью. [5-7]

При исследовании нелинейных математических моделей важную роль играет выявление новых качественных свойств, характерных только для нелинейных моделей, в отличие от свойств линейных моделей

Впервые в исследовательской работе Х. Фуджиты были найдены условия наличия и отсутствия глобального временного решения задачи Коши для модели процесса диффузии тепла, выражаемой полулинейным уравнением параболического типа. Установлено критическое значение численных параметров, найдено условие разрушения решения, которое теперь называется критическим показателем типа Фудзиты

Глобальные условия существования и несуществования решения и их значение в уравнении пористых сред и дважды нелинейных уравнениях теплообмена Дж. Л. Васкес, Х. А. Левин, Х. Дж. Фан, Ю. В. Ци, М. Чунлай, А. Д. Пабло, Р. Феррейра, Ф. Кирос, Дж. Д. Росси, Д. Стан, А. А. Самарский, В. А. Галактинов, С. П. Посашков, С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, Н. В. Афанасьева, А. Ф. Тедеев, С. П. Дегтярев, Е Новрузов, М. М. Арипов, Ш. Его изучали такие ученые, как Садуллаева, и были получены критические показатели типа Фуджиты

Свойства математических моделей, выраженных краевой задачей Неймана для уравнений политропной фильтрации квазилинейного возмущающего параболического типа Х. А. Левин, Питер Ю. Х. Панг, З. Ван, Дж. Инь, К. Ван, З. Ли, М. Чунлай, В. Ду, К. Дэн, В. Хуан, Дж. Инь, Ю. Ван, М. Х. Ван, Ф. Кирос, Дж. Д. Росси, Р. Феррейра, З. Х. Цзян, С. Н. Чжэн, Дж. Чжоу, А. Джеффри, В. А. Галактинов и др., и система таких уравнений Ч. Ботао, М. Юншэн, М. Чунлай, Д. М. Лю, З. Сян, Ю. Ван, З. Ван, З. Цянь, Л. Вэньци, З. Дж. Цуй, С. Н. Чжэн , X.F.Song, Z.X.Jiang, изучали Маан А. Рашид, Мирослав Хлебик [8-12]

З. Ли, М. Чунлай, В. Ду, Р. Керснер, Г. Рейес, А. Тесей с исследованием условий глобальности во времени и условий неглобальности решений задач Коши для нелинейного теплообмена с переменной плотностью, реакции-диффузии и уравнения фильтрации П. Чианчи, Гижонг Лю, С. Камин, Х. А. Левин, Р. Феррейра, Юань-Вэй Ци, С. П. Курдюмов, Е. С. Куркина, А. В. Мартыненко, А. Ф. Тедеев, В. Н. Шраменко, М. М. Арипов, А. Хайдаров, Ш. Были привлечены А. Садуллаева, А. С. Матякубов, Ф. А. Кабильжанова, Д. Мухамедиева и другие. Мукаи Кентаро, Мочизуки Киёси, Хуан Цин изучали свойства решений задачи Коши при медленно затухающих начальных условиях для случая медленной диффузии уравнения пористой среды с источником. Они доказали асимптотическое условие решения при достаточно большом значении времени. Кроме того, ими доказано, что при формировании неограниченных и глобальных решений появляются критические показатели второго типа определяющие предел для начальных данных. Аналогичные результаты были получены Джонг-Шэн Го и Го Юн-Джен Линь для случая быстрой диффузии.

Кроме того, та же задача, что и выше, для модели процесса теплопроводности в однородной среде с градиентной нелинейностью и источником Ю. Ямаути, рецензии З. Ли, В. Ду, Ю. Ми, Р. Цзэн, М. Агуэ, А. Бланше, Хосе А. Каррильо, М. Дель Пино, Дж. Дольбо и другие. М. Чунлай, Л. Се, З. Ли, С. Сун, С. Чжэн, А.Д. Пабло, Ф. Кирос, Дж.Д. Ряд научных работ Росси, Дж. Л. Васкеса, Х. А. Левина и др. посвящен исследованию условий наличия и отсутствия глобального решения во времени нелокальных задач, представляющих процессы теплопроводности и политропной фильтрации с источником [8-14]

Исследование свойств представленных выше решений занимает важное место в математическом моделировании рассматриваемых процессов, состоящих из диффузионных процессов, представленных нелинейными уравнениями параболического типа.Численное моделирование нелокальных краевых задач для нелинейных диффузионных процессов.

Целью данной темы является численное и аналитическое исследование нелинейных математических моделей процесса диффузии в однородных и неоднородных средах, представленных квазилинейными параболическими уравнениями.

Построены нижняя и верхняя оценки обобщенных решений задачи нелинейной диффузии в неоднородных средах.

Методом эталонных уравнений получены основные пределы асимптотики различных автомодельных решений задач нелинейной диффузии.Для исследования свойств качества моделей нелинейной диффузии в неоднородных средах расчетные схемы, алгоритмы и комплекс программных средств разрабатывались, а численные решения нелинейных задач визуализировались с помощью пакета Matlab.

АНАЛИЗ И РЕЗОЛЬТАТЫ

Рассмотрим математическую модель диффузионного процесса с источником, заданным следующим нелокальным граничным условием

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\rho(x)u^{\beta},(x,t)\in R_{+}\times(0,+\infty), \quad (1)$$

$$-\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=u^{q}(0,t),t>0, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0,x\in R_{+}. \quad (3)$$

здесь $p,\beta,q>0,\ \rho(x)=x^{n}$

Краевая задача (1)-(3) играет важную роль при математическом моделировании процессов реакции-диффузии в нелинейных средах, течений жидкости в пористых средах, биологической динамики популяций, политропной фильтрации, синергетики, решения ряда задач. других полей.

Известно, что решение задачи (1)-(3) является глобальным или неограниченным при определенных условиях числовых параметров. Ванцзюань Ду и Чжунпин Ли рассматривали этот вопрос в связи с (1)-(3). Они определили условия глобальности по времени и неглобальности решений задачи (1)-(3) при n=0. Условия глобальности во времени и нелокальности решений нелокальных краевых задач для уравнения пористой среды были определены в работах Артуро де Пабло, Фернандо Ли Кироса и Хулио Д. Росси.

Для глобального решения задачи (1)–(3) справедлива следующая теорема

Теорема 1. Предположим $\beta>2p+n-1$ и $u_0(x)$ достаточно мала, то решение задачи (1)-(3) глобально

Результат 1. Для глобального решения задачи (1)-(3) уместна следующая оценка

$$u(x,t)\leq u_1(x,t)=t^{\alpha}\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}.$$

здесь $xt^{-\gamma},\alpha=\frac{1}{1-\beta},\gamma=\frac{p-1-\beta}{(p+n)(1-\beta)}$

Полученные результаты

Теорема 2. Предположим $q>2(p-1)$, в этом случае

(1)-(3) компактное решение проблемы $\xi\to\left(\frac{a(p+n)}{(p-2)}\right)^{\frac{p-1}{p+n}}\gamma^{\frac{1}{p}}$

которая имеет следующий асимптотический вид

$$u(x,t)=t^{\alpha}\left(a-b\xi^{\frac{p+n}{p-1}}\right)_{+}^{\frac{p-1}{p-2}}(1+o(1)),a>0,b=\frac{p-2}{p+n}\gamma^{\frac{1}{p-1}}$$

Полученные результаты

$\beta > 2p-1, q < \frac{2(p-1)}{p}$ давайте посмотрим на ситуацию

Теорема 3. Для решения задачи (1)-(3) с компактным проводником годится следующая асимптотика по $\xi \to a$.

$$u(x,t) = t^n C\left(a - \xi^{\frac{p+n}{p}}\right)_+^{\frac{p-1}{p-2}}\left(1 + o(1)\right), a > 0,$$

здесь

$$C = \left(\frac{p-2}{p-1}a\gamma\right)^{\frac{1}{(p-2)}}\frac{p-2}{p-1}, n = \frac{p-1}{(n+2)(p-1)-(p+n)q}, \gamma = \frac{p-1-q}{(n+2)(p-1)-(p+n)q}$$

Вычислительный эксперимент

Сформулирован алгоритм решения задач (1) и (3) и создана соответствующая алгоритму программа на языке программирования C# (Visual Studio 2012). Известно, что при численном решении нелинейных задач выбор начального приближения, обеспечивающего быструю сходимость итерационных процессов к точному решению и сохраняющего качественные свойства нелинейных процессов, является одной из основных проблем.

Эта задача была решена путем принятия построенных выше асимптотических формул в качестве начального приближения по значениям числовых параметров. Ниже представлены результаты некоторых вычислительных экспериментов, полученные графики и анализ численных решений

Эта задача была решена путем принятия построенных выше асимптотических формул в качестве начального приближения по значениям числовых параметров. Ниже представлены результаты некоторых вычислительных экспериментов, полученные графики и анализ численных решений

- Результирующие значения были сгенерированы в Visual Studio 2012 (C#);

- Графический модуль Plot и Esurf пакета Matlab был использован в среде Visual Studio 2012 (C#) для построения графиков, соответствующих результатам.

- Пространственные координаты выделены в графическом режиме Esurf

Основные результаты, полученные в данной работе:

Построены нижняя и верхняя оценки обобщенных решений задачи нелинейной диффузии в неоднородных средах;

С помощью автомодельной аппроксимации и теорем сравнения найдены условия решения задачи нелинейной диффузии в глобальном времени

Для исследования качественных свойств моделей нелинейной диффузии в неоднородных средах разработаны алгоритмы численного расчета, комплекс программных средств, визуализированы численные решения нелинейных задач с использованием пакета MatLab. В процессе визуализации использовались графические модули 3D-Plot и E-Surf пакета MatLab.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы знаем, что нелинейные задачи могут быть решены аналитически только в некоторых частных случаях. По этой причине мы можем использовать численные решения и получать решения, близкие к точному решению. В результате визуализации результатов мы можем видеть действие процесса и иметь возможность составить о нем четкое мнение

При численном решении нелинейных задач важную роль играют тщательное изучение и анализ автомодельных и аппроксимативно-автомодельных уравнений. В процессе работы были рассмотрены и использованы для решения поставленной задачи различные методы расчета, построения автомодельных решений. Исследованы и применены к численному решению асимптотики автомодельных решений и их свойства.

REFERENCES

1. Арипов М. Методы эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач. Ташкент, «Фан», 1988. 137 б,

2. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656с.

3. Aripov M. Asymptotics of Solutions of the non-Newton Polytrophic Filtration Equations. ZAMM 2000, vol.80, supl.3, 767-768.

4. Aripov M. Muhammadiev J.U. Asymptotic behaviour of automodel solitions for one system of qusilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific – Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica, Nr.3, (1999), pg. 19-40.

5. Rakhmonov Z. On the properties of solutions of multidimensional nonlinear filtration problem with variable density and nonlocal boundary condition in the case of fast

diffusion // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2016, 9(2), 236–245.

6. Арипов М.М., Рахмонов З.Р. Об асимптотики решений задачи теплопроводности с источником и нелинейным граничным условием // Вычислительные технологии, Том 20, Часть 2, 2015, 216-223.

7. Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка. УМН, 1987, т.42, Вып. 2 (254), с.135-176.

8. Jin C., Yin J. Critical exponents and non-extinction for a fast diffusive polytrophic filtration equation with nonlinear boundary sources // Nonlinear Anal. 2007. 67. 2217–2223.

9. Wang Z., Yin J., Wang C. Critical exponents of the non-Newtonian polytrophic filtration equation with nonlinear boundary condition // Appl. Math. Lett. 2007. 20. 142–147.

10. Galaktionov V.A., Levine H.A. On critical Fujita exponents for heat equations with nonlinear flux boundary condition on the boundary // Israel J. Math. 1996. V. 94. P. 125–146.

11. Zhongping Li, Chunlai Mu. Critical exponents for a fast diffusive polytrophic filtration equation with nonlinear boundary flux // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 346. P. 55-64.

12. Wanjuan Du and Zhongping Li. Critical exponents for heat conduction equation with a nonlinear boundary condition // Int. Jour. of Math. Anal. 2013. V. 7, № 11. P. 517-524.

13. R. Ferreira, F. Quiros and J.D. Rossi, The balance between nonlinear inwards and outwards boundary flux for a nonlinear heat equation, J. Differential Equations, 184, 2002, 259-282.