ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ

Хайрулла Киличевич Каршибоев
Самаркандский институт экономики и сервиса, доцент
karshiboyev@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этом работе доказана предельная теорема для функция распределений $\Phi_n^{(k)}(t)$ времени $k-$го попадания в $V_n(x_b)$ при $k \geq 2$.

Ключевые слова: гомеоморфизмов окружности, времени попадания, число вращения.

ABSTRACT

In this paper, it is proved the limit theorem for distribution functions $\Phi_n^{(k)}(t)$, $k \geq 2$ of $k-$th entrance times in $V_n(x_b)$.

Keywords: homeomorphisms of a circle, hit time, rotation number.

ВВЕДЕНИЕ

Важным классом с особенностями являются гомеоморфизмы окружности с изломами. Поведение ренормализаций для гомеоморфизмов окружности из класса $C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращения изучалось Вул и Ханиным. Естественным является изучение поведения ренормализаций гомеоморфизмов окружности с изломами с более низкой гладкостью.

Изучение времени попаданий в определенное подмножество для измеримых преобразований является важной задачей эргодической теории. Для линейных поворотов окружности на иррациональный угол ρ, временя $k-$го попадания $E_n^{(k)}(x)$ в $n-$ую ренормализационную окрестность $V_n(x_b)$ точки x_b, изучалось в работе Коэло и де Фария. Показано, что предельная функция распределения для сходящейся подпоследовательности функций распределений времени $k-$го попадания является абсолютно непрерывной.

Для гомеоморфизмов окружности с особенностями изучение сходимости последовательности времени попадания является более сложной и интересной задачей.

Все это позволяет заключить, что изучение ренормализаций, а также сходимости времени попадания для гомеоморфизмов с изломами является актуальной задачей современного нелинейного анализа.

МЕТОДОЛОГИЯ

В данной статья изучено доказана предельная теорема для функция распределений $\Phi_n^{(k)}(t)$ времени $k-$го попадания в $V_n(x_b)$ при $k \geq 2$.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим сохраняющий ориентацию гомеоморфизмов окружности T_f с поднятием f т.е.

$$T_f x = f(x) \ (\mathrm{mod}\ 1),\ x \in S^1 = R^1 / Z^1 \cong [0,1),$$

где $f(x)$- непрерывная, строго возрастающая функция на R^1, удовлетворяющая условию $f(x+1) = f(x)+1,\ x \in R^1$. Функция f называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма T_f. Отметим, что поднятие f определено с точностью до аддитивной целой константы, но эта неоднозначность устраняется начальным условием $0 \leq f(0) < 1$. А.Пуанкаре показал, что для любого $x \in R^1$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(x)}{n} = \rho_f$, здесь и всюду в дальнейшем $f^{(n)}(x)$-обозначает n-ую итерацию функции $f(x)$. Число $\rho = \rho_f$ называемое *числом вращения*, не зависит от выбора x и является важнейшей числовой характеристикой гомеоморфизма T_f.

Предположим, что число вращения $\rho = \rho_f$ иррационально. Пусть разложение ρ в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [k_1, k_2, ..., k_n, ...],\ k_n \geq 1$. Обозначим $\dfrac{p_n}{q_n} = [k_1, k_2, ..., k_n],\ \ n \geq 1$. Числа q_n-называются *временами первого возвращения* и удовлетворяют разностному уравнению: $q_{n+1} = k_{n+1} q_n + q_{n-1},\ n \geq 1$, $q_0 = 1,\ q_1 = k_1$.

Пусть $x_0 \in S^1$. Положим $x_i = T_f^i x_0,\ \ i \geq 1$. Заметим , что при нечётном n точка x_{q_n} лежит слева от x_0 , а при чётном n- справа.

Обозначим через $V_n(x_0)$ замкнутый отрезок соединяющий точки x_{q_n} и $x_{q_{n+1}}$. $V_n(x_0)$- называется *n- ой ренормализационной окрестностью* точки x_0. Определим *отображение Пуанкаре* $\pi_n : V_n(x_0) \to V_n(x_0)$:

$$\pi_n(x) = \begin{cases} T_f^{q_{n+1}} x, & \text{если } x \in [x_{q_n}, x_0), \\ T_f^{q_n} x, & \text{если } x \in [x_0, x_{q_{n+1}}]. \end{cases}$$

По общей схеме метода ренормализационной группы (РГ) главным является изучение поведение отображения Пуанкаре $\pi_n(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку длина отрезка $V_n(x_0)$ экспоненциально стремится к нулю и $q_n \to \infty$ при $n \to \infty$, поведение $\pi_n(x_0)$ удобно изучить в новых перенормированных координатах. Введем перенормированные координаты z на $V_n(x_0)$: $x = x_0 + z(x_0 - x_{q_n})$. Отсюда видно, что в новых координатах $x_0 \to 0$, $x_{q_n} \to -1$. Обозначим через a_n и $(-b_n)$ перенормированные координаты точек $x_{q_{n+1}}$ и $x_{q_n + q_{n+1}}$ соответственно. В новых координатах отображению $\pi_n(x)$ соответствует следующая пара (f_n, g_n):

$$f_n(z) = \frac{f^{q_{n+1}}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_{n+1}}{x_0 - x_{q_n}}, \quad z \in [-1, 0],$$

$$g_n(z) = \frac{f^{q_n}(x_0 + z(x_0 - x_{q_n})) - x_0 - p_n}{x_0 - x_{q_n}}, \quad z \in [0, a_n].$$

Хорошо известно, что преобразование ренормгруппы в множестве гомеоморфизмов окружности с изломами имеет периодические траектории. Обозначим через X множество пар строго возрастающих функций $(f(x),\ x \in [-1, 0];\ g(x),\ x \in [0, \alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

$a)$ $f(0) = \alpha,\ g(0) = -1, \quad f(-1) = g(\alpha), \quad f(-1) < 0, \quad f^{(2)}(-1) \geq 0;$

$b)$ $f(x) \in C^{2+\varepsilon}([-1, 0]),\ g(x) \in C^{2+\varepsilon}([0, \alpha])$, при некотором $\varepsilon > 0$.

Определим преобразование ренормализационной группы $R_b : X \to X$:

$$R_b(f(x),\ x \in [-1, 0];\ g(x),\ x \in [0, \alpha]) = (\tilde{f}(x),\ x \in [-1, 0];\ \tilde{g}(x),\ x \in [0, \alpha']),$$

где $\tilde{f}(x) = -\alpha^{-1} f(g(-\alpha x)),\ \tilde{g}(x) = -\alpha^{-1} f(-\alpha x),\ \alpha' = -\alpha^{-1} f(-1)$.

Положим $c = f'(-0) \cdot (g'(+0))^{-1}$, т.е. c- величина излома пары (f, g) в точке $x = 0$. В работе Вула и Ханина доказано, что при фиксированном c и числе вращения равным “золотому сечению”, преобразование R_b имеет единственную периодическую орбиту $\{f_i(x),\ g_i(x),\ i=1,2\}$ периода два. Функции $f_i(x,c_i),\ g_i(x,c_i),\ i=1,2$ имеют вид:

$$f_i(x)=\frac{(\alpha_i+c_i x)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x}, \quad g_i(x)=\frac{\alpha_i\beta_i(x-c_i)}{\alpha_i\beta_i c_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

где $\alpha_1=\dfrac{c_1-\beta_0^2}{1+\beta_0}$, $\alpha_2=\dfrac{c_2-\beta_0^2}{1+\beta_0}$, $c_1=c,\ c_2=c^{-1}$, $\beta_1=\beta_2=\beta_0$, а число β_0 – единственный корень уравнения $\beta^4-\beta^3-\beta^2\dfrac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0$ принадлежащий интервалу $(0,1)$. При помощи пар $(f_i,\ g_i),\ i=1,2$ определим гомеоморфизмы окружности T_i: $T_i(x)=l_i\left(f_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если $0\le x<(1+\alpha_i)^{-1}$ и $T_i(x)=l_i\left(g_i(l_i^{-1}(x))\right)$, если $(1+\alpha_i)^{-1}\le x<1$. Числа вращения этих гомеоморфизмов равны “золотому сечению”. Мы будем изучать гомеоморфизм T_1. Гомеоморфизм T_2 изучается аналогичным образом. Гомеоморфизм T_1 переобозначим через T_b. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех C^1 – сопряженных с T_b гомеоморфизмов окружности.

Теорема 1. [4]. Для всех отображений $T\in E(T_b)$ существует единственная непрерывная (в тихоновской топологии) функция $U: I_+\to R^1$ обладающая следующими свойствами:

1.Для любых $\vec{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k,\varepsilon_{k+1},\ldots\varepsilon_n,\ldots)$ и $\vec{b}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k,b_{k+1},\ldots b_n,\ldots)$ из пространства I_+ верна оценка

$$\left|U(\vec{\varepsilon})-U(\vec{b})\right|\le K_1\alpha^k$$

где $\alpha=\alpha(T_b)\in(0,1)$ и константа $K_1>0$ не зависит от $\vec{\varepsilon},\vec{b}$ и k.

2.Пусть $1\le r<n,\ \Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in\xi_n(x_0,T)$, $\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_r)\in\xi_r(x_0,T)$, $\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\subset\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_r)$.

Тогда

$$l\left(\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_n)\right)=l\left(\Delta(a_1,a_2,\ldots,a_r)\right)\times$$
$$\times\left(1+\psi_1(a_1,a_2,\ldots,a_n);\,T\right)\times$$
$$\times\exp\{\sum_{s=r+1}^{n}U(a_s,a_{s-1},\ldots,a_r,\ldots,a_1,\vec{\gamma}(a_1))\}$$

где $|\psi_1(a_1, a_2, ..., a_n; T)| \le const\, \alpha^r$.

Пусть $n \ge 1$ и $V_n(x_0)$ - $n-$ая ренормализационная окрестность точки $x_0 \in S^1$.

Определим $E_n^{(1)}(x) = \min\{i \ge 1 : T_f^i x \in V_n(x_0)\}$, $E_n^{(k)}(x) = \min\{i \ge E_n^{(k-1)}(x) : T_f^i x \in V_n(x_0)\}$, $k \ge 1$. Рассмотрим случайные величины $D_n^{(k)}(x) = E_n^{(k)}(x) - E_n^{(k-1)}(x)$. Отметим, что $D_n^{(1)}(x) = E_n^{(1)}(x)$ принимает значения от 1 до q_{n+1}, а $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: q_n и q_{n+1}. Введем нормированные случайные величины: $\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1}\, D_n^{(k)}(x)$. Задача состоит в изучении сходимости функции распределений для случайных величин $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$, а также их предельные распределения.

Обозначим $F_n^{(k)}(t) = \mu_f(\{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \le t\})$, $t \in R^1$. Отметим, что функции $F_n^{(k)}(t)$ совпадают с соответствующими функциями распределения для линейного поворота T_ρ. В работе де Фария и Коэло доказано, что в зависимости от числа вращения ρ предельное распределение сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(1)}(t)\}$ является или равномерным, или непрерывным и кусочно-линейным на отрезке $[0,1]$. А в случае $k > 1$ предельное распределение для сходящейся подпоследовательности $\{F_{n_i}^{(k)}(t)\}$является или распределением случайной величины $X \equiv 1$, или ступенчатым распределением с двумя точками разрыва.

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(t)$ функцию распределения $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега l: $\Phi_n^{(k)}(t) = l(\{x \in S^1 : \overline{D}_n^{(k)}(x) \le t\})$, $t \in R^1$.

Если диффеоморфизм T_f гладко сопряжен с линейным поворотом T_ρ, то для последовательности $\{\Phi_n^{(k)}(t)\}$ все приведенные выше утверждения, относящиеся к $\{F_n^{(k)}(t)\}$, также справедливы. С другой стороны, для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома (или с несколькими точками излома лежащими на одной орбите и с нетривиальным произведением величин изломов) и с иррациональным числом вращения ρ_f
сопрягающий гомеоморфизм T_φ является сингулярным.

Возьмем произвольный гомеоморфизм окружности $T \in B(T_0)$. Напомним, что $E_n^{(k)}(x)$ означает времени $k-$го попадания точки $x \in S^1$ в $n-$ый ренормализационный отрезок V_n. Обозначим $D_n^{(k)}(x) = E_n^{(k)}(x) - E_n^{(k-1)}(x)$, $x \in S^1$. Случайная величина $D_n^{(k)}(x)$ принимает всего два значения: q_n или q_{n+1}. Нормируем её разделивна на q_{n+1}^{-1}:

$$\overline{D}_n^{(k)}(x) = q_{n+1}^{-1} D_n^{(k)}(x).$$

Обозначим через $\Phi_n^{(k)}(x)$ функцию распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега l.

Теорема 2. [2]. Пусть $k > 1$. Тогда функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ относительно меры Лебега задается следующим образом:

$$\Phi_n^{(k)}(t) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad t < q_n q_{n+1}^{-1}; \\ \sum\limits_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)} \cap \pi_n^{-k}\Delta_0^{(n+1)})) + \\ + \sum\limits_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)} \cap \pi_n^{-k}\Delta_0^{(n+1)})), \quad \text{если} \quad q_n q_{n+1}^{-1} \le t < 1; \\ 1, \quad \text{если} \quad t \ge 1. \end{cases}$$

В этом работе сформулируем и докажем предельную теорему для последовательности функций распределения времени $k-$го попадания $\Phi_n^{(k)}(t)$, $k > 1$.

Теорема 3. Пусть гомеоморфизм $T \in B(T_b)$, $k > 1$ и $\Phi_n^{(k)}(t)$-функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$. Тогда

1) для всех $t \in R^1$ существует конечные предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_n^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)$,

   причем $\Phi^{(k)}(t) = 0$, если $t \le 0$, и $\Phi^{(k)}(t) = 1$, если $t \ge 1$;

2) функция $\Phi^{(k)}(t)$ является ступенчатой функцией на $[0, 1]$ с двумя точками разрыва.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что $k > 1$. Функция распределения случайной величины $\overline{D}_n^{(k)}(x)$ - ступенчатая функция, принимающая только три значения. Поэтому докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{D}_n^{(k)}(t)$ в три этапа.

1) $D_n^{(k)}(t)=0$, если $t<q_n\,q_{n+1}^{-1}$. Учитывая

$$\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{q_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\rho$$

получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n^{(k)}(t)=0$, если $t\le\rho$.

2) Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_n^{(k)}(t)=1,\ \text{если } t\ge 1.$$

3)Теперь докажем существование предела суммы

$$\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\Delta_0^{(n+1)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})))+\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\Delta_0^{(n)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)}))) \quad (1)$$

Сначала мы должны выяснить структуру множества $\pi_n^{-1}(\Delta_0^{(n+1)})\cap V_n$.

Напишем явный вид функции $\pi_n^{-1}(x)$:

$$\pi_n^{-1}(x)=\begin{cases} T^{-q_n}x, & \textit{если} \quad x\in[x_{q_n},x_{q_{n+2}}),\\ T^{-q_{n+1}}x, & \textit{если} \quad x\in[x_{q_{n+2}},x_{q_{n+1}}) \end{cases}$$

Функция $\pi^{-1}(x)$, как видно из последней формулы, имеет разрыв только в точке $x=x_{q_{n+2}}$. Следовательно, для любого интервала $I\subset V_n$ область $\pi^{-1}(I)$ представляет собой интервал, если $x_{q_{n+2}}\in I$, или сумму двух интервалов, если I не содержит точку $x_{q_{n+2}}$, или сумму двух интервалов, если $x_{q_n}\in I$. Отсюда вытекает, что

$$\Delta_0^{(n+1)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})=\bigcup_{m=1}^{l_1(k)}\omega'_m,\quad \Delta_0^{(n)}\cap\pi_n^{-k}(\Delta_0^{(n+1)})=\bigcup_{p=1}^{l_2(k)}\omega''_p$$

где ω'_m и ω''_p- такие интервалы, что $\omega'_m\subset\Delta_0^{(n+1)}$, $1\le m\le l_1(k)$; $\omega''_p\subset\Delta_0^{(n)}$, $1\le p\le l_2(k)$. Отметим, что $l_1(k)+l_2(k)\le 2^k$. Сумму (1) обозначим S_n и напишем в следующем виде:

$$S_n=\sum_{m=1}^{l_1(k)}\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m))+\sum_{p=1}^{l_2(k)}\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p)).$$

В силу утверждения теоремы 1. Суммы $\sum_{i=0}^{q_n-1} l(T^i(\omega'_m))$ и $\sum_{j=0}^{q_{n+1}-1} l(T^j(\omega''_p))$ сходится при $n \to \infty$, отсюда следует, что существует конечный предел суммы S_n при $S_n \to \infty$. Теорема 3 доказана.

REFERENCES

1. K.M.Khanin and E.B.Vul. Circle Homeomorphisms with weak Discontinuities. Advances in Soviet Mathematics, v. 3, 1991, p. 57-98.
2. Coelho Z., de Faria E. Limit laws of entrance times for homeomorphisms of the circle// Israel J.Math.-1996.- №93.-P.93-112.
3. И.П. Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. Эргодическая теория. –М.
4. Джалилов А.А., Ханин К.М. Об инвариантной мере для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома// Ж. Функционал анализ и его приложения.-1998.-№32(3).-С.11-21.
5. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. - М.: Издательская фирма “Физико-математическая литература”, 1995. Наука, 1980.
6. Вул Е.Б., Ханин К.М. Гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома// Успехи математических наук. -1990. т.45. вып.3(273).- С.189-190.
7. Джалилов А.А., Каршибоев Х.К. Предельные теоремы для времени попаданий отображений окружности с одной точкой излома // Успехи математических наук. – Москва, 2004.- Т. 59. вып. 1(355). С. 185-186.
8. Х.К.Каршибоев. Поведение ренормализаций эргодических отображений окружности с изломом// Узб. матем. журнал. – Ташкент, 2009. -№4. -С.82-95.