ISSN: 2181-1385 ISI: 0,967 | Cite-Factor: 0,89 | SIS: 1,9 | ASI: 1,3 | SJIF: 5,771 | UIF: 6,1

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ

К. Х. Усанов
Самарканд, Сам ИЭС

АННОТАЦИЯ

В работе обсуждается задача продолжения решения системы теории упругости в области по её значениям и значениям её напряжений на части границы, т.е. задача Коши для системы Ламе.

Ключевые слова: математика**,** задача Коши, система Ламе, Матрица Карлемана.

Пусть R^2 вещественное Евклидово пространство, D- область в R^2 с кусочно-гладкой границей ∂D и S-гладкий часть ∂D.

Пусть $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ –точки из R^2 и $U(x)$ удовлетворяет в области D однородной системе уравнений Ламе :

$$\mathrm{L}\, U(x)=0, \qquad (1)$$

где L=$\mu\Delta+(\lambda+\mu)\, grad\, div$, $\Delta-$ оператор Лапласа, λ,μ-постоянные Ламе, такие что, $\mu\neq 0$, $\lambda\neq -2\mu$.

Положим

$$\begin{aligned} &U(y)=f(y),\\ &T(\partial_y,n)U(y)=g(y),\ \ y\in S \end{aligned} \qquad (2)$$

где $f(y)=(f_1(y),f_2(y))$ и $g(y)=(g_1(y),g_2(y))-$ заданные непрерывные вектор-функции на S, $T(\partial_y,n)$–дифференциальный оператор, с компонентами $T_{ij}(\partial_y,n)=\mu\,\delta_{ij}\dfrac{\partial}{\partial n}+\lambda n_j(y)\dfrac{\partial}{\partial y_j}+\mu n_j(y)\dfrac{\partial}{\partial y_i}$, $i,j=1,2$ где, δ_{ij} – символ Кронекера.

Требуется продолжить $U(y)$ в D, исходя из заданных f и g.

В настоящей работе приводится метод решения, основанный на функцию Карлемана [1].

Исходя из функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа, построена матрица Карлемана задачи Коши для систем уравнений теории упругости в ограниченных областях работах [2,3], а для многомерной случаи в специальных неограниченных областей задача рассмотрена в работе [2].

Определение 1. Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется $(2x2)$ – матрица $\Pi(y,x,\sigma)$ удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $\Pi(y,x,\sigma)=\Gamma(y,x)+G(y,x,\sigma)$,

где σ - положительный числовой параметр, матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системы (1) всюду в D, $\Gamma(y,x)$-матрица фундаментальных решений системы теории упругости.

2) $\int\limits_{\partial D\backslash S}\left(\left|\Pi(y,x,\sigma)\right|+\left|T(\sigma_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\right|\right)ds_y \le \varepsilon(\sigma)$,

где $\varepsilon(\sigma)\to 0$, при $\sigma\to\infty$ равномерно по x на компактных подмножествах D; здесь и далее $|\Pi|$ – означает евклидово норму матрицы $\Pi=\|\Pi_{ij}\|$, т.е. $|\Pi|=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{m}\Pi_{ij}^2\right)^{1/2}$, в частности $|U|=\left(\sum\limits_{i=1}^{m}U_i^2\right)^{1/2}$, для вектора $U=(U_1,...,U_m)$.

Определение 2. Вектор-функция $U(y)=(U_1(y),...,U_m(y))$ называется регулярной в D, если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D}=D\cup\partial D$.

Теорема 1. Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области D определяется формулой [4]

$$U(x)=\int\limits_{\partial D}\left(\Gamma(y,x)T(\partial_y,n)U(y)-U(y)\{T(\partial_y,n)\Gamma(y,x)\}\right)ds_y,\ x\in D.$$

Нетрудно заметить, что из определения матрицы Карлемана и известной интегральной формулы Грина, в последней формуле, фундаментальное решение $\Gamma(y,x)$ можно заменить матрицей Карлемана. Следовательно имеет места.

Теорема 2. Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения (1) в области D определяется формулой

$$U(x)=\int\limits_{\partial D}\left(\Pi(y,x,\sigma)T(\partial_y,n)U(y)-U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}\right)ds_y,\ x\in D\ , \tag{3}$$

где $\Pi(y,x,\sigma)$ – матрица Карлемана.

Пусть $K(\omega)$, $\omega=u+iv$, (u,v-вещественные) - целая функция, принимающая на вещественной оси вещественные значения и удовлетворяющая условиям.

$$K(u)\ne 0,\ \sup_{V\ge 1`}\left|v^pK^{(p)}(\omega)\right|=M(p,u)<\infty,\quad p=0,1,2,\ u\in R^1$$

Положим $\alpha=|y_1-x_1|$.

Функцию $\phi(y,x)$ при $\alpha>0$ определим следующим равенством:

$$-2\pi\ K(x_2)\phi\ (y,x)=\int_0^{\infty}\operatorname{Im}\frac{K\left(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2\right)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2-v_2}\ \frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\ , \qquad (4)$$

С помощью функции $\phi(y,x)$ построим матрицу

$$\Pi(y,x)=\left\|\Pi_{ij}(y,x)\right\|_{2x2}=\left\|\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\delta_{ij}\phi(y,x)-\frac{(\lambda+\mu)}{2\mu(\lambda+2\mu)}(y_j-x_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\phi(y,x)\right\|_{2x2} \qquad (5)$$

Пусть теперь D- бесконечная область из R^2, лежащая внутри слоя наименьшей ширины, определяемого неравенством $0<y_2<h,\ h=\frac{\pi}{\rho},\rho>0.$ Причём ∂D состоит из гладкого куска S и $y_2=0$. Будем предполагать, что для некоторого $b_0>0$ площадь ∂D удовлетворяет условию роста

$$\int_{\partial D}\exp(-b_0\exp\rho_0|y_1|)ds_y<\infty,\ 0<\rho_0<\rho, \qquad (6)$$

При $\sigma\geq 0$ в (4)-(6) положим

$$K(\omega)=\exp\left(\sigma\omega-bchi\rho_1\left(\omega-\frac{h}{2}\right)-b_1chi\rho_0\left(\omega-\frac{h}{2}\right)\right)\quad ,$$

где $\omega=y_2+iv,\quad \rho_0,\rho_1\in(0,\rho),\ 0<x_2<h,\ b>0\quad b_1>b_0\left(\cos\rho_0\frac{h}{2}\right)^{-1}.$

Возьмем $\phi(y,x,\sigma)=\phi(y,x)$ и $\Pi(y,x,\sigma)=\Pi(y,x)$. В [1] доказана следующая.

Лемма 1. Функция $\phi(y,x,\sigma)$ представима в виде

$$\phi(y,x)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}+g(y,x,\sigma),\qquad r=|y-x|$$

где $g(y,x,\sigma)$, – некоторая функция, определенная для всех значений y,x и гармоническая по переменной y во всём R^2.

Из этой леммы получим, что матрица $\Pi(y,x,\sigma)$ является матрицей Карлемана задачи (1), (2).

Предположим, что $U(x)\in A(D)$ и

$$|U(y)|+|T(\partial y,n)U(y)|\leq M,\ \ y\in\partial D. \qquad (7)$$

В этих предположениях верна формула (7), где

$$K(\omega)=(\omega-x_2+2h)^{-1}\exp\sigma\omega\ ,\omega=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2,$$

Введем обозначение

$$U_\sigma(x)=\int_S\left[\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}\ \right]ds_y,x\in D.$$

$$A_\rho(D)=\{U(x)\in A(D):|U(y)|+|T(\partial y,n)U(y)|\leq\exp(0(\exp|y_1|)),y_1\to\infty,\ y\in D\}.$$

Теорема 3. Пусть $U(x) \in A_\rho(D)$ удовлетворяет граничному условию (7). Тогда $$|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC(\rho, x)\sigma \exp(-\sigma x_2), \; x \in D,$$

где $C(\rho, x) = C(\rho) \int\limits_{y_2=0} \frac{ds_y}{r^3}$.

REFERENCES

1. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа. ДАН СССР, 1977, т. 235, №2, ст.281-283.

2. Махмудов О. И., Ниёзов И. Э. Задача Коши для системы уравнения теории упругости в бесконечной области// Узбекский математический журнал. 2006. №4. с.44-53

3. Makhmudov O., Niyozov I. The Cauchy problem for the Lame system in infinite domains in R^m// Journal of Inverse and Ill-Posed Problems.V14.N9.2006.pp.905-924(20).

4. Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В., Гегелия Т. Г. и др. Трёхмерные задачи математической теории упругости и терм упругости. Классическая и микро полярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.