СХЕМА ПЕРЕНОРМИРОВКИ ДЛЯ СОСТОЯНИЯ ЭЛЕКТРОНА В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Тулкун Закирович Насиров
Университет геологических наук

Юлдузхон Мумтоз кизи Эралиева
Ташкентский государственный технический университет
tulkunnasirov@yandex.ru

АННОТАЦИЯ

В рамках релятивистского уравнения Швингера-Дайсона рассмотрено возможные связанные состояния электрона в двумерном пространстве. Получено радиальное уравнение, которое является нелинейным. Предложена схема перенормировки с кулоновским потенциалом в двумерном приближении.

Ключевые слова: схема перенормировки, двумерное пространство, электрон, уравнение Швингера-Дайсона

ABSTRACT

In the framework of the Schwinger-Dyson equation the possible bound states of electron in two dimension space has been considered. The radial equation which is nonlinear one has been obtained. The renormalization scheme with Coulomb potential in the tho dimension approximation has been proposed.

Keywords: renormalization scheme, two dimension space, electron, Schwinger-Dyson equation

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, квантовый эффект Холла в настоящее время обещает прояснение взаимосвязи некоторых фундаментальных физических констант, таких как постоянная тонкой структуры, постоянная Планка и ряда других констант. В связи с чем проводятся исследования этого эффекта как в экспериментальным и теоретическим способами. Практически во всех рассматриваемых теоретических подходах состояние электрона изучается с помощью уравнения Шредингера, которое является нерелятивистским.

Следует здесь отметить, что электрон, имея массу покоя примерно 10^{-30} кг, является ультрарелятивистской частицей. Разумееется, изучение электрона в рамках уравнения Шредингера, на наш взгляд, не совсем правильно. В настоящей работе для описания возможного связанного состояния электрона в двумерном пространстве предложено использовать уравнение Швингера-Дайсона.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Уравнение Швингера-Дайсона в импульсном представлении имеет вид [1]:

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = m_0 + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{q}}{(2\pi)^3}V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|)\sin\varphi(q) \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{q}}{(2\pi)^3}V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|)\,\hat{p}\hat{q}\cos\varphi(q) \end{cases} \tag{1}$$

где $E(p)$ – одночастичная энергия и $\varphi(p)$ – фазовая функция электрона, являющимися искомыми функциями, p – импульс, m_0 – масса электрона, $V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|)$ – потенциал взаимодействия электрона с полем,

$$\hat{p} = \frac{p}{|\mathrm{p}|};$$

$$\hat{q} = \frac{q}{|\mathrm{q}|}.$$

Для решения уравнения (1) удобно преобразовать его в безразмерный вид подстановкой:

$$\begin{aligned} &p/m_0 \to p; \\ &E(p)/m_0 \to E(p); \\ &m_0 \to 1. \end{aligned} \tag{2}$$

После чего уравнение (1) примет вид:

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = 1 + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{q}}{(2\pi)^3}V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|)\sin\varphi(q) \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{q}}{(2\pi)^3}V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|)\,\hat{p}\hat{q}\cos\varphi(q) \end{cases} \tag{3}$$

Считая, что по одному направлению (оси p_z) движение электрона ограничено, потенциал взаимодействия можно представить в виде

$$V(|\mathrm{p}-\mathrm{q}|) = \frac{4\pi\alpha}{|\mathrm{p}-\mathrm{q}|^2}\delta(p_z - q_z); \tag{4}$$

где α – постоянная тонкой структуры.

Далее, подставляя выражение (4) в уравнение (3) с использованием цилиндрической системы координат (q_z, q, θ)

и интегрируя по переменной q_z, получим следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = 1 + \dfrac{\alpha}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty \sin\varphi(q)qdq\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{p^2+q^2-2pq\cos\theta}; \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \dfrac{\alpha}{4\pi^2}\int\limits_0^\infty \cos\varphi(q)qdq\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{\cos\theta d\theta}{p^2+q^2-2pq\cos\theta}, \end{cases} \tag{5}$$

Интегрирование по полярной координате θ в первой строке уравнения (5) дает

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{p^2+q^2-2pq\cos\theta} = \frac{8pq}{p^2+q^2}. \tag{6}$$

Аналогично можно проинтегрировать и второй интеграл во второй строке этого же уравнения

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\theta d\theta}{p^2+q^2-2pq\cos\theta} = \frac{2(1-\pi)}{pq}. \tag{7}$$

Таким образом, с подстановкой выражений (6) и (7) уравнение (5) примет вид:

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = 1 + \dfrac{\alpha}{\pi^2}\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin\varphi(q)qdq}{p^2+q^2}; \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \dfrac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\int\limits_0^\infty \cos\varphi(q)dq. \end{cases} \tag{8}$$

Итак, трехмерное интегральное уравнение (3) привели к одномерному (8). Теперь прежде чем приступить к решению уравнения (8) мы должны исследовать его поведение для случаев:

1) $p\to 0$;
2) $0 < p \le p_{\max} < \infty$;
3) $p\to\infty$.

Начнем с первого случая ($p\to 0$). Для этого интеграл в первой строке уравнения (8) удобно представить в виде:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin\varphi(q)dq}{q} = \int\limits_0^h\frac{\sin\varphi(q)dq}{q} + \int\limits_h^{p_{\max}}\frac{\sin\varphi(q)dq}{q} + \int\limits_{p_{\max}}^\infty\frac{\sin\varphi(q)dq}{q}, \tag{9}$$

где $h \ll p_{max}$ – достаточно малый импульс. Представляет интерес предел, когда в области $0 \le q \le h$ $\varphi(q)$ соответствует виду для свободного электрона. При этом ее можно представить в виде:

$$\sin\varphi(q) \to \frac{1}{\sqrt{q^2+1}}.$$

В таком случае интегрирование первого члена в правой части выражения (9) дает:

$$\int_0^h \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{q^2+1}}{q}\right|\Bigg|_0^h = \ln\frac{2}{0} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}\right|. \qquad (10)$$

Точно так же можно проинтегрировать и третий член выражения (9)

$$\int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{q^2+1}}{q}\right|\Bigg|_{p_{\max}}^{\infty} = \ln\left|\frac{1+\sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}}\right|. \qquad (11)$$

Следует отметить, что в выражении (10) первый член является логарифмически расходящимся. Однако, его можно устранить переопределением входных параметров.

Во втором случае $(0 < p \leq p_{\max} < \infty)$ имеем дело с областью взаимодействия электрона с полем и ее легче исследовать численным методом.

В третьем же случае ($p \to \infty$) также интеграл в первой строке уравнения (8) удобно разбить на две части следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin\varphi(q)qdq}{p^2+q^2} = \int_0^{p_{\max}} \frac{\sin\varphi(q)qdq}{p^2+q^2} + \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{\sin\varphi(q)qdq}{p^2+q^2}. \qquad (12)$$

Второй интеграл в правой части также удобно исследовать подстановкой для функции φ решения для свободного электрона. Тогда

$$\int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{qdq}{\sqrt{q^2+1}(p^2+q^2)} = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{p_{\max}^2+1}}{\sqrt{p^2-1}}\right). \qquad (13)$$

Переходим к исследованию интеграла во второй строке уравнения (8), которое также удобно проводить для трех рассмотренных выше случаев.

Тогда для случаев $p \to 0$ и $p \to \infty$

$$\cos\varphi(q) \to \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}.$$

и

$$\int_0^{\infty} \cos\varphi(q)dq = \int_0^h \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}dq + \int_h^{p_{\max}} \cos\varphi(q)dq + \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}dq = h + \infty - p_{\max} + \int_h^{p_{\max}} \cos\varphi(q)dq. \qquad (14)$$

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Таким образом, мы исследовали возможные значения интегралов для случаев $p \to 0$ и $p \to \infty$. Теперь нам предстоит изучить решения уравнения (8) для случая $0 < p \leq p_{\max} < \infty$. Нетрудно заметить, что интегралы в этом уравнении являются расходящимися, связанными с особенностями кулоновского потенциала, и в связи с чем решения уравнения (8) теряют какой-либо физический смысл.

Для получения решения уравнения Швингера-Дайсона с определенным физическим смыслом необходимо воспользоваться процедурой перенормировки. В литературе известны множество вариантов данной процедуры.

В данной работе мы используем схему перенормировки, в которой расходимости устраняются с добавлением в интеграл функции φ, соответствующей свободному электрону.

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = 1 + \dfrac{\alpha}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} + \frac{\alpha}{\pi^2}\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi(q)q}{p^2+q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}}\right)dq; \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \dfrac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\displaystyle\int_0^\infty \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}dq + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\int_0^\infty \left(\cos\varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}\right)dq. \end{cases} \quad (15)$$

Теперь, если учесть то, что в первых интегралах первой и второй строк этого уравнения имеются расходимости (см. выражения (10) и (14)), уравнение (15) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} E(p)\sin\varphi(p) = 1 - \dfrac{\alpha}{\pi^2}\left(\ln\left|\dfrac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}\right| + \ln\left|\dfrac{1+\sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}}\right|\right) + \dfrac{\alpha}{\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin\varphi(q)q}{p^2+q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}}\right)dq; \\ E(p)\cos\varphi(p) = p + \dfrac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}(h - p_{\max}) + \dfrac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\displaystyle\int_0^\infty \left(\cos\varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}}\right)dq. \end{cases} \quad (16)$$

Заметим, что уравнение (16) теперь свободно от расходимости, поскольку в нем единица в правой части первой строки (в которую входит масса электрона) и импульс в правой части второй строки переопределены.

Для решения уравнения (16) удобно привести его к уравнению для одной неизвестной. Умножая первую строку на cos$\varphi(p)$ и вторую строку на sin$\varphi(p)$, затем вычитая из первой строки вторую, получим уравнение для одной функции $\varphi(p)$

$$(1 + A_1 + A_2)\cos\varphi(p) - (p + B_1 + B_2)\sin\varphi(p) = 0 \quad (17)$$

и с помощью уже известной $\varphi(p)$ можно определить значения для одночастичной энергии $E(p)$

$$E(p) = (1 + A_1 + A_2)\sin\varphi(p) + (p + B_1 + B_2)\cos\varphi(p), \quad (18)$$

где

$$A_1 = \frac{\alpha}{\pi^2}\left(\ln\left|\frac{1+\sqrt{h^2+1}}{h}\right| + \ln\left|\frac{1+\sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}}\right| \right);$$
$$A_2(p,q) = \frac{\alpha}{\pi^2}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\varphi(q)q}{p^2+q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}} \right)dq;$$
$$B_1(p) = \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\left(h - p_{\max}\right);$$
$$\mathrm{B}_2(p,q) = \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p}\int_0^{\infty}\left(\cos\varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \right)dq. \tag{19}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, на основании анализа проведенных исследований в рамках уравнения Швингера-Дайсона с кулоновским потенциалом в двумерном пространстве можно отметить основные выводы:

во-первых, получено радиальное уравнение для состояния электрона в двумерном пространстве, которое является нелинейным;

во-вторых, полученное уравнение свободно от каких-либо расходимостей и сингулярностей, которое будет описывать состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет прояснить возможные связанные состояния электрона в двумерном электронном газе. Полученные результаты могут быть в дальнейшем применены для описания взаимосвязи фундаментальных физических констант в квантовом эффекте Холла.

REFERENCES

1. Nasyrov T.Z. Mass spectrum and leptonic decay constants of pseudoscalar mesons. (2007). *Ukr. J. Phys.*, 52. 8. 723-728.