

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

М. Х. Эшмуродов, К. М. Шаимов

Самаркандский архитектурно-строительный университет, 140147, Самарканд,  
Узбекистан

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0005-0667-8116>

[masudeshmurodov@samdaqu.edu.uz](mailto:masudeshmurodov@samdaqu.edu.uz),

ORCID ID: <https://orcid.org/0009-0005-8279-4530>

[shaimovkomiljon@gmail.com](mailto:shaimovkomiljon@gmail.com),

### АННОТАЦИЯ

В статье продемонстрированы основные этапы решения одномерного параболического уравнения дифференциально–разностным методом, известный также метод прямых. Переход к сеточным функциям производился по координате  $x$ , когда при  $x=0$  наложено граничное условие первого рода, а при  $x=1$  – условие третьего рода. Показаны пути поиска собственных значений и векторов трехдиагональной матрицы, с помощью которых осуществляется переход к автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям относительно новых сеточных функций. Полученные обыкновенные дифференциальные уравнения решены численно. Приведены формулы прямого перехода от исходной сеточной функции к новой сеточной функции и обратного перехода.

Результаты можно также использовать при решении многомерных уравнений параболического типа, а также одно– и многомерных уравнений эллиптического и гиперболического типов, если имеет место такие смешанные граничные условия по крайней мере одной из координат.

**Ключевые слова:** Метод прямых; дифференциально-разностный метод; параболическое уравнение; Функция сетки.

### ANNOTATSIIYA:

Maqolada bir o'lchovli parabolik tenglamani differentsial–ayirmalar (to'g'ri chiziq) usulida yechishning asosiy bosqichlari namoyish etilgan. To'r funktsiyaga o'tish  $x$  koordinatasiga nisbatan  $x=0$  da birinchi jinsli,  $x=1$  da esa uchinchi jinsli chegaraviy shartlar uchun amalga oshirilgan. Uch diagonalli matritsaning yangi to'r funktsiyaga nisbatan avtonom oddiy differentsial tenglamalarga o'tish imkonini beradigan xos sonlari



va vektorlarini topish usuli keltirilgan. Hosil bo'lgan oddiy differentsial tenglamalar sonli usulda yechilgan. Dastlabki to'r funktsiyadan yangisiga va qayta o'tish uchun formulalar keltirilgan.

Natijalardan ko'p o'lchovli parabolik tenglamalarni, shuningdek bir va ko'p o'lchovli elliptik va giperbolik tenglamalarni xuddi shunday chegaraviy shart aqalli biror koordinata uchun o'rinli bo'lgan holda yechishda foydalanish mumkin.

**Kalit so'z:** To'g'ri chiziqlar usuli; differentsial–ayirmalar usuli; parabolik tenglama; To'r funktsiya.

Быстродействие и объем памяти ПЭВМ достаточны для численного решения многочисленных практических задач. Тем не менее, при решении уравнений в частных производных возникает проблема, связанная нехваткой ресурсов ПЭВМ. Проблема становится ощутимой при решении многомерных уравнений и их систем методом конечных разностей, когда применяются различного рода расщепления и прогонки [1–4]. Объем вычислений можно значительно сократить, если использовать дифференциально–разностный метод. Ниже демонстрируем особенности данного метода при решении уравнения теплопередачи с источником членом в правой части при граничном условии I рода в одном конце отрезка и условии III рода – на другом его конце.

В первой части статьи была сформулирована задача теплопередачи со смешанными граничными условиями в отрезке  $(0; l)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (3)$$

$$T(0, t) = \mu_0(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T(l, t)}{\partial x} + \alpha T(l, t) = q_l(t). \quad (2)$$

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (4)$$

Аппроксимируя уравнение и условия, составили систему конечноразностных уравнений и результат представили в матричной форме

$$\frac{dU}{dt} = \frac{a^2}{h^2} AU + F, \quad (7)$$

где

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_{N+1})^*$$



$$F = \left( f_1 + \frac{a^2}{h^2} \mu_0, f_2, \dots, f_N, f_{N+1} + \frac{2a^2}{h} q_l \right)^*$$

$$A = \|a_{p,q}\|_{N+1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -2 - 2\alpha h \end{pmatrix}_{N+1}. \quad (8)$$

Трехдиагональную матрицу  $A$  представили в виде произведения [5]:

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

где  $\Lambda$  – диагональная матрица с не нулевыми элементами  $\lambda_s$ ;  $V$  – фундаментальная, подобная  $A$  матрица, с элементами  $v_{s,p}$ ;  $V^{-1}$  – обратная  $V$  матрица с элементами  $v_{s,p}^-$ , которые представляли элементов  $s$ -го собственного вектора матрицы  $A$ .

Представив последнее уравнение в виде

$$V^{-1}A = \Lambda V^{-1}, \quad (9)$$

составили систему однородных уравнений

$$\begin{cases} (-2 - \lambda_s)v_{s,1}^- + v_{s,2}^- = 0, \\ v_{s,p-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,p}^- + v_{s,p+1}^- = 0 \text{ при } p = 2..N-1, \\ v_{s,N-1}^- + (-2 - \lambda_s)v_{s,N}^- + 2v_{s,N+1}^- = 0, \\ v_{s,N}^- + (-2 - \lambda_s - 2\alpha h)v_{s,N+1}^- = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для случая  $\alpha l < 1$ , полагая  $-2 - \lambda_s = 2 \cos \theta_s$ , определили собственные числа из условия нетривиальности решения системы (10):

$$\varphi(\theta_s) = 0,$$

где

$$\varphi(\theta_s) = \sin(N+2)\theta_s - 2\alpha h \sin(N+1)\theta_s - \sin N\theta_s \quad (\sin \theta_s \neq 0).$$

и алгебраические дополнения

$$A_{s,p} = (-1)^{s+p} \begin{cases} D_{p-1}(\theta_s) D''_{N+1-s}(\theta_s) & \text{при } (1 \leq s \leq N) \cap (1 \leq p < s), \\ D_{s-1}(\theta_s) D''_{N+1-p}(\theta_s) & \text{при } (1 \leq s \leq N) \cap (s \leq p \leq N+1), \\ D_{p-1}(\theta_{N+1}) \cdot 2 & \text{при } (s = N+1) \cap (1 \leq p < N+1), \\ D_N(\theta_{N+1}) & \text{при } (s = N+1) \cap (p = N+1) \end{cases}$$

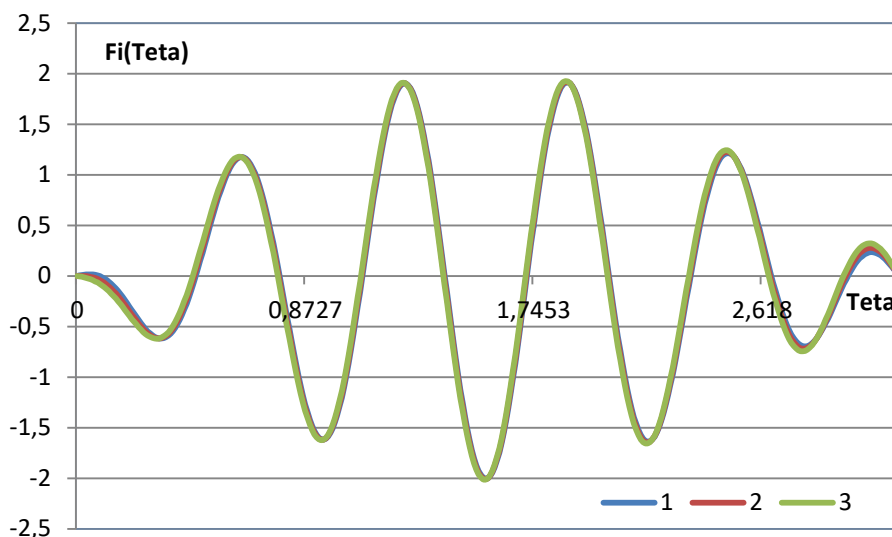
основной матрицы A системы (10).

Они пропорциональны элементам s-го собственных векторов матрицы A

$$v_{s,p}^- = A_{s,p} / \sqrt{S_s},$$

где  $S_s = \sum_{p=1}^{N+1} (A_{s,p})^2$ .

Продолжив работу, здесь вернемся к случаям  $\alpha l > 1$  и  $\alpha l = 1$ .

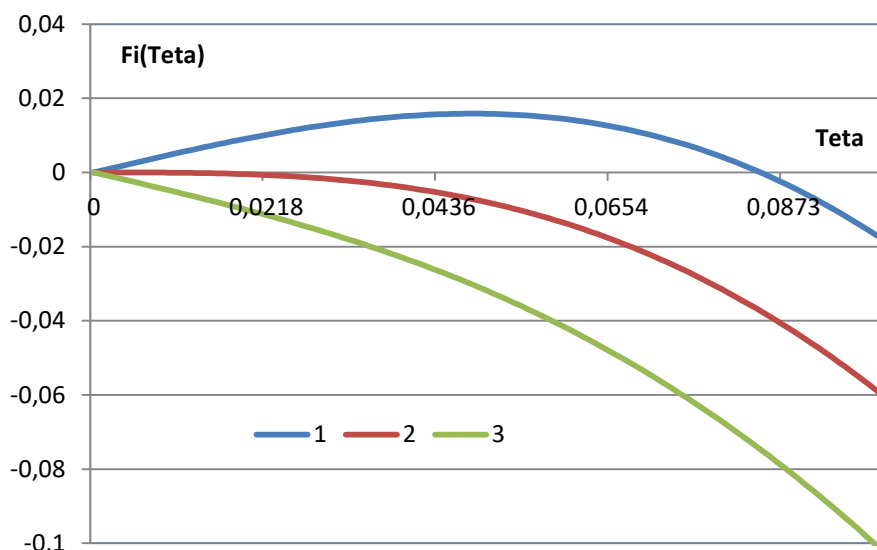


$$1 - \alpha l = 0.75, \quad 2 - \alpha l = 1, \quad 3 - \alpha l = 1.25$$

Рис. 1. Графики функции  $\varphi_{N+1}(\theta)$  в  $[0; \pi]$  при различных значениях параметра  $\alpha l$ .  $N=9, h=0.5, l=5$ .

В предыдущей части работы описали способ решения уравнения  $\varphi(\theta_s)=0$  при условии  $\alpha l < 1$ . Подробно анализируем это уравнение при нечетном количестве  $N+2$  узлов в области расчета  $[0; l]$ .





$$1 - \alpha l = 0.75, \quad 2 - \alpha l = 1, \quad 3 - \alpha l = 1.25$$

Рис. 2. Графики функции  $\varphi_{N+1}(\theta)$  в правой окрестности точки  $\theta = 0$  при различных значениях параметра  $\alpha l$ .  $N=9$ ,  $h=0.5$ ,  $l=5$ .

При  $\theta_s = 0$  и  $\theta_s = \pi$  функция  $\varphi_{N+1}(\theta)$  имеет нулевые значения (рис. 1).

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки  $\theta_s = 0$ .

Оценка значения функции в близкой правой окрестности точки  $\theta_s = 0$ , т.е. при  $\theta_s = \delta \ll 1$ , приводит к зависимости

$$\varphi(\delta) = \sin(N+2)\delta - 2\alpha h \sin(N+1)\delta - \sin N\delta \approx 2\delta(1-\alpha l).$$

При  $1-\alpha l > 0$  функция  $\varphi_{N+1}(\theta)$  возрастает (кривая 1 рис. 2). При  $1-\alpha l = 0$  производная функции также равна нулю (кривая 2 рис. 2). Соответственно, при  $1-\alpha l = 0$  в точке  $\theta_s = 0$  уравнение  $\varphi(\theta_s) = 0$  имеет двукратный корень. Это единственный случай кратного корня этого уравнения в промежутке  $[0; \pi]$ . При  $1-\alpha l < 0$  в окрестности точки  $\theta_s = 0$  функция  $\varphi_{N+1}(\theta)$  убывает (кривая 3 рис. 2).

Если при  $1-\alpha l = 0$  корнем уравнения является  $\theta_1 = 0$ , то при  $1-\alpha l < 0$  теряется первый корень уравнения  $\varphi_{N+1}(\theta) = 0$ , так как условие  $0 \leq |\lambda_1| \leq 4$  не выполняется.

Таким образом, для полного решения собственных чисел и векторов поставленной задачи: **(а)** надо найти первый собственный вектор матрицы перехода при  $1-\alpha l = 0$ ; **(б)** надо найти первое собственное число и соответствующий собственный

вектор матрицы перехода при  $1 - \alpha l < 0$ . Остальные собственные числа и векторы матрицы перехода находим по представленным в предыдущей части работы.

(а) Находим первый собственный вектор матрицы перехода при  $1 - \alpha l = 0$ , когда  $\sin \theta_1 = 0$ .

При этом система уравнений (10) приобретает вид:

$$\begin{cases} 2v_{s,1}^- + v_{s,2}^- = 0, \\ v_{s,p-1}^- + 2v_{s,p}^- + v_{s,p+1}^- = 0 \text{ при } p = 2..N-1, \\ v_{s,N-1}^- + 2v_{s,N}^- + 2v_{s,N+1}^- = 0, \\ v_{s,N}^- + (2 - 2\alpha h)v_{s,N+1}^- = 0. \end{cases}$$

В этом случае основная матрица системы принимает более простой вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2 - 2\alpha h \end{pmatrix}_{N+1}$$

Из последней системы уравнений составим отношения искомым

$$\frac{v_{1,p}^-}{v_{1,p+1}^-} = \frac{A_{1,p}}{A_{1,p+1}} = \gamma_p.$$

Здесь  $A_{1,p}$  –  $p$ -е алгебраическое дополнение основной матрицы последней системы; притом  $v_{1,p}^- = A_{1,p} / \sqrt{S_1}$ , где  $S_1 = \sum_{k=1}^{N+1} (A_{1,k})^2$ .

Из первого уравнения системы имеем

$$\gamma_1 = -1/2.$$

С учетом  $v_{1,p-1}^- = \gamma_{p-1}v_{1,p}^-$  вторая строка системы приобретает вид

$$\gamma_{p-1}v_{1,p}^- + 2v_{1,p}^- + v_{1,p+1}^- = 0.$$

Отсюда находим, что при  $p = 2..N-1$  уместно

$$\gamma_p = \frac{A_{1,p}}{A_{1,p+1}} = \frac{1}{2 + \gamma_{p-1}}.$$

Тогда третья строка последней системы принимает вид  $(\gamma_{N-1} + 2)v_{1,N}^- + 2v_{1,N+1}^- = 0$ . Отсюда находим



$$\gamma_N = \frac{A_{1,N}}{A_{1,N+1}} = \frac{2}{2 + \gamma_{N-1}}.$$

С другой стороны, из последней строки системы следует

$$\gamma_N = \frac{A_{1,N}}{A_{1,N+1}} = -2 + 2\alpha h.$$

Знаки и значение элемента  $A_{1,N+1}$  определим из последней матрицы. Вычёркиваются ее первая строка и последний столбец. В результате образуется трехдиагональная матрица, в диагонали которой образуются  $N - 1$  единиц и 2, в левой нижней части – нули. Тогда, согласно Суждению 4, находим, что  $A_{s,N+1} = (-1)^{1+N+1} \cdot 2$ .

Теперь по рекуррентной формуле при  $p = N, N - 1, \dots, 2, 1$  вычислим

$$A_{1,p} = \gamma_p A_{1,p+1}.$$

Далее вычислим сумму  $S_1 = \sum_{k=1}^{N+1} (A_{1,k})^2$  и нормируем результат:

$$v_{1,p}^- = A_{1,p} / \sqrt{S_1}.$$

Таким образом, для случая  $1 - \alpha l = 0$  определены элементы первого собственного вектора с применением обычной прогонки и одного значения алгебраического дополнения основной матрицы преобразованной системы (10).

При  $s = 2, 3, \dots, N + 1$ , как уже отметили выше, значения элементов собственных векторов вычисляются в обычном порядке, который представлен в предыдущей части работы. В результате находим всех элементов матрицы  $V^{-1}$ .

**(б)** Находим первое собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы перехода при  $1 - \alpha l < 0$ .

В этом случае при решении векового уравнения потеряли первое собственное значение  $\lambda_1$  в силу того, что  $\lambda_1 = -2(1 + \cos \theta_1) < -4$ , но находили значения  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{N+1}$ . Недостающий первый корень (15), условно обозначенный через  $2 \cos \theta_1$ , можно найти с применением теоремы Виета.

Докажем следующее суждение.

**Суждение 7.** При обозначениях  $c = 2 \cos \theta_s$  и  $\beta = 2\alpha h$  вычисление значения определителя  $D''_{N+1}$  приводит к многочлену, где член с первым порядком  $s$  имеет коэффициент

$$\sum_{s=1}^{N+1} \cos \theta_s = \alpha h,$$



а свободный член составляет

$$\prod_{s=1}^{N+1} 2\cos\theta_s = (-1)^{N+1} \begin{pmatrix} 2, & \text{при } N+1=4m \\ -2\alpha h, & \text{при } N+1=4m+1 \\ -2, & \text{при } N+1=4m+2 \\ 2\alpha h, & \text{при } N+1=4m+3 \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Вычислим значения определителя  $D''_{N+1}$  для различных значений  $N+1$  и представим результат в виде:

$$D''_{N+1} = a_0 c^{N+1} + a_1 c^N + a_2 c^{N-1} + \dots + a_N c + a_{N+1}.$$

Проверка показала, что для обеспечения общности формулы значения  $D''_{N+1}$  необходимо принимать  $D''_0 = 2$  и  $D''_1 = c - \beta$ .

Ими пользуемся при вычислении  $D''_{N+1}$  при  $N=1$ :

$$D''_2 = \begin{vmatrix} c & 2 \\ 1 & c - \beta \end{vmatrix} = cD''_1 - D''_0 = c^2 - \beta c - 2.$$

При  $N=2$  имеем

$$D''_3 = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 \\ 0 & 1 & c - \beta \end{vmatrix} = cD''_2 - D''_1 = c(c^2 - \beta c - 2) - (c - \beta) = c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta.$$

При  $N=3$  имеем

$$D''_4 = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c & 2 \\ 0 & 0 & 1 & c - \beta \end{vmatrix} = cD''_3 - D''_2 = c(c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta) - (c^2 - \beta c - 2) = \\ = c^4 - \beta c^3 - 4c^2 + 2\beta c + 2.$$

При  $N=4$  имеем

$$D''_5 = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c - \beta \end{vmatrix} = cD''_4 - D''_3 = c(c^4 - \beta c^3 - 4c^2 + 2\beta c + 2) - \\ - (c^3 - \beta c^2 - 3c + \beta) = c^5 - \beta c^4 - 5c^3 + 3\beta c^2 + 5c - \beta.$$

При  $N=5$  имеем



$$D_6'' = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c-\beta \end{vmatrix} = cD_5'' - D_4'' = c(c^5 - \beta c^4 - 5c^3 + 3\beta c^2 + 5c - \beta) -$$

$$-(c^4 - \beta c^3 - 4c^2 + 2\beta c + 2) = c^6 - \beta c^5 - 6c^4 + 4\beta c^3 + 9c^2 - 3\beta c - 2.$$

При  $N = 6$  имеем

$$D_7'' = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c-\beta \end{vmatrix} = cD_6'' - D_5'' =$$

$$= c(c^6 - \beta c^5 - 6c^4 + 4\beta c^3 + 9c^2 - 3\beta c - 2) -$$

$$-(c^5 - \beta c^4 - 5c^3 + 3\beta c^2 + 5c - \beta) =$$

$$= c^7 - \beta c^6 - 7c^5 + 5\beta c^4 + 14c^3 - 6\beta c^2 - 7c + \beta.$$

При  $N = 7$  имеем

$$D_8'' = \begin{vmatrix} c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c-\beta \end{vmatrix} = cD_7'' - D_6'' =$$

$$= c(c^7 - \beta c^6 - 7c^5 + 5\beta c^4 + 14c^3 - 6\beta c^2 - 7c + \beta) -$$

$$-(c^6 - \beta c^5 - 6c^4 + 4\beta c^3 + 9c^2 - 3\beta c - 2) =$$

$$= c^8 - \beta c^7 - 8c^6 + 6\beta c^5 + 20c^4 - 10\beta c^3 - 16c^2 + 4\beta c + 2.$$

И т.д.

Представленные значения определителя  $D''_{N+1}$  позволяют выявить общую закономерность построения коэффициентов векового уравнения, которая раскрывается согласно закону Виета.

Во-первых, коэффициентом члена  $c$  в уравнении  $N+1$ -й степени является  $a_1 = -\beta$ . Согласно теореме Виета и введенных обозначений, имеем

$$\sum_{s=1}^{N+1} c_s = \beta = 2\alpha h,$$

т.е.

$$\sum_{s=1}^{N+1} \cos \theta_s = \alpha h. \quad (12)$$

Сумма попарно умноженных корней  $c$  представляет

$$a_2 = \sum_{s=1}^{N+1} \sum_{k=1(k \neq s)}^{N+1} c_s c_k = -(N+1).$$

Значения коэффициентов  $a_2, a_3, \dots, a_N$  нас не интересуют.

Свободный член векового уравнения, равный  $(-1)^{N+1} c_1 c_2 \dots c_N c_{N+1}$ , согласно теореме Виета, представляется в зависимости от количества узлов в расчетной области:

$$(-1)^{N+1} \prod_{s=1}^{N+1} c_s = \begin{cases} -2\alpha h (= -\beta), & \text{при } N+1 = 4m+1, \\ -2, & \text{при } N+1 = 4m+2, \\ 2\alpha h (= \beta), & \text{при } N+1 = 4m+3, \\ 2, & \text{при } N+1 = 4m. \end{cases}$$

Здесь  $m$  – натуральное число.

Умножим обеих сторон последней формулы на  $(-1)^{N+1}$  и получим:

$$\prod_{s=1}^{N+1} 2 \cos \theta_s = (-1)^{N+1} \begin{pmatrix} 2, & \text{при } N+1 = 4m \\ -2\alpha h, & \text{при } N+1 = 4m+1 \\ -2, & \text{при } N+1 = 4m+2 \\ 2\alpha h, & \text{при } N+1 = 4m+3 \end{pmatrix} = a_{N+1}. \quad (13)$$

Суждение 7 доказано.

**Суждение 8.** Условно обозначенный корень  $2 \cos \theta_1$  можно вычислить по выражению

$$\cos \theta_1 = -\sum_{s=2}^{N+1} \cos \theta_s + \alpha h$$

или по выражению

$$2 \cos \theta_1 = a_{N+1} / \prod_{s=2}^{N+1} 2 \cos \theta_s.$$

Это суждение вытекает из формул (12) и (13) соответственно.

В первом случае формулу (13) можно использовать для проверки достоверности найденного значения условного  $2 \cos \theta_1$ , для которого уместно условие  $\lambda_1 < -4$ . А во втором случае условие (12) используется для проверки верности предполагаемого решения  $2 \cos \theta_1$ .

Теперь находим элементы первого собственного вектора матрицы перехода и для этой цели предлагается следующий алгоритм на основе обычной прогонки.

Как в предыдущем случае из (10) составим отношения искомым

$$v_{1,p}^- / v_{1,p+1}^- = \gamma_p.$$

Из первого уравнения системы имеем

$$\gamma_1 = 1 / (2 + \lambda_1).$$

Тогда для  $p = 2..N - 1$  имеем  $v_{1,p-1}^- = \gamma_{p-1} v_{1,p}^-$  и вторая строка системы приобретает вид

$$\gamma_{p-1} v_{1,p}^- + (-2 - \lambda_1) v_{1,p}^- + v_{1,p+1}^- = 0.$$

Отсюда находим, что при  $p = 2..N - 1$  уместно равенство

$$\gamma_p = \frac{1}{2 + \lambda_1 - \gamma_{p-1}}.$$

Подстановка найденного таким образом значения  $\gamma_{N-1}$  в предпоследнее уравнение  $v_{1,N-1}^- + (-2 - \lambda_1) v_{1,N}^- + 2v_{1,N+1}^- = 0$  системы (10) дает

$$\gamma_N = \frac{2}{2 + \lambda_1 - \gamma_{N-1}}.$$

Итак, составили последовательность

$$v_{1,p}^- = \gamma_p v_{1,p+1}^-,$$

что равносильно последовательности

$$A_{1,p} = \gamma_p A_{1,p+1}$$

Знаки и значение элемента  $A_{1,N+1}$ , а также остальные составляющие первого собственного вектора определяются по способу, который использовали

при  $1 - \alpha l = 0$ : находим  $A_{1,N+1} = (-1)^{1+N+1} \cdot 2$ ; вычислим  $A_{1,p} = \gamma_p A_{1,p+1}$  при  $p = N..1$  и нормируем результат:  $v_{1,p}^- = A_{1,p} / \sqrt{S_1}$ , где  $S_1 = \sum_{k=1}^{N+1} (A_{1,k})^2$ .

Таким образом, решены задачи **(а)** и **(б)**.

Далее, используя метод Гаусса с выбором главного элемента по [9], находим значения элементов матрицы  $V$ , обратной матрице  $V^{-1}$  [ ]. Преобразование матричного уравнения, переход к автономным уравнениям и способы решения последних, а также формулы обратного перехода приведены в предыдущей части работы.

По представленному материалу составлена программа для изучения динамики термического состояния однородного стержня при реализации граничного условия I рода при  $x = 0$  и условия III рода при  $x = l$ .

Программа состоит из частей описания скалярных, векторных и матричных величин, ввода исходных данных, формирования и проверки матриц  $V$ ,  $\Lambda$ ,  $V^{-1}$  и формирования начального условия для  $\bar{u}_i^{n+1}$ .

В цикле по  $n$  формировали граничные условия и свободные члены для  $u_i^n$  и  $\bar{u}_i^n$ , а также вычисляли значения  $u_0^{n+1}$  и  $\bar{u}_i^{n+1}$ .

Через заданные шаги по времени осуществляли переход к  $u_i^{n+1}$  и сохраняли значения времени и  $u_i^{n+1}$  для дальнейшей визуализации и анализа результатов.

Тестовые расчеты, чтобы легче было представить результаты, проводились для длины  $l = 0.5$ ,  $T_0(x) = 10.0$ ,  $\mu_0(t) = 20.0$ ,  $f(x, t) = 0.0$ ,  $q_l(x) = 200.0$ ,  $\tau = 0.001$  и  $a^2 = 1.0$ .

При  $\alpha = 2.0$  выполняется условие  $1 - \alpha l = 0$  и собственные числа задачи составили -4.0000, -3.8021, -3.4342, -2.9280, -2.3328, -1.7070, -1.1119, -0.6055, -0.2373, -0.0411. Элементы матрицы  $V^{-1}$  для этого случая приведены в табл. 1.

Таблица 1

Элементы матрицы  $V^{-1}$  при  $N = 9$  и  $\alpha = 2.0$

0,0568	-0,1136	0,1704	-0,2272	0,284	-0,3408	0,3976	-0,4544	0,5112	-0,284
--------	---------	--------	---------	-------	---------	--------	---------	--------	--------

0,2036	-0,367	0,4577	-0,4579	0,3675	-0,2043	0,0007	0,203	-0,3665	0,2288
0,3221	-0,4619	0,3404	-0,0263	-0,3027	0,4604	-0,3577	0,0526	0,2823	-0,2287
-0,4076	0,3782	0,0566	-0,4307	0,3431	0,1124	-0,4474	0,3028	0,1664	-0,2286
0,4527	-0,1507	-0,4026	0,2847	0,3078	-0,3871	-0,179	0,4467	0,0303	-0,2284
-0,4534	-0,1328	0,4145	0,2543	-0,34	-0,3539	0,2363	0,4231	-0,1124	-0,228
0,4098	0,364	-0,0866	-0,4408	-0,3049	0,17	0,4559	0,2349	-0,2473	-0,2273
-0,3265	-0,4553	-0,3084	0,0252	0,3436	0,4539	0,2893	-0,0504	-0,3596	-0,2255
-0,2124	-0,3743	-0,4475	-0,4144	-0,283	-0,0845	0,1342	0,3209	0,4315	0,2199
-0,084	-0,1646	-0,2383	-0,3023	-0,3539	-0,3909	-0,4118	-0,4159	-0,4028	-0,1866

Элементы матрицы  $V$ , обратной матрице  $V^{-1}$ , представлены в табл. 2.

Таблица 2

Элементы матрицы  $V^{-1}$  при  $N = 9$  и  $\alpha = 2.0$

0,0526	0,1935	0,3061	-0,3873	0,4303	-0,431	0,3897	-0,3107	-0,2026	-0,0812
-0,1051	-0,3487	-0,439	0,3594	-0,1432	-0,1263	0,3461	-0,4332	-0,3571	-0,159
0,1577	0,435	0,3235	0,0538	-0,3826	0,394	-0,0823	-0,2934	-0,4268	-0,2303
-0,2102	-0,4351	-0,025	-0,4094	0,2705	0,2417	-0,4192	0,024	-0,3953	-0,2922
0,2628	0,3492	-0,2876	0,3261	0,2926	-0,3232	-0,29	0,3269	-0,27	-0,342
-0,3153	-0,1941	0,4375	0,1068	-0,3679	-0,3364	0,1617	0,4319	-0,0806	-0,3778
0,3679	0,0007	-0,3399	-0,4251	-0,1701	0,2247	0,4335	0,2753	0,128	-0,398
-0,4205	0,1929	0,05	0,2877	0,4245	0,4022	0,2234	-0,048	0,3061	-0,4019
0,473	-0,3483	0,2683	0,1581	0,0288	-0,1068	-0,2352	-0,3422	0,4116	-0,3892
-0,5256	0,4348	-0,4347	-0,4345	-0,4341	-0,4335	-0,4322	-0,4292	0,4195	-0,3606

Полученные для этого случая изотермы представлены на рис. 3.

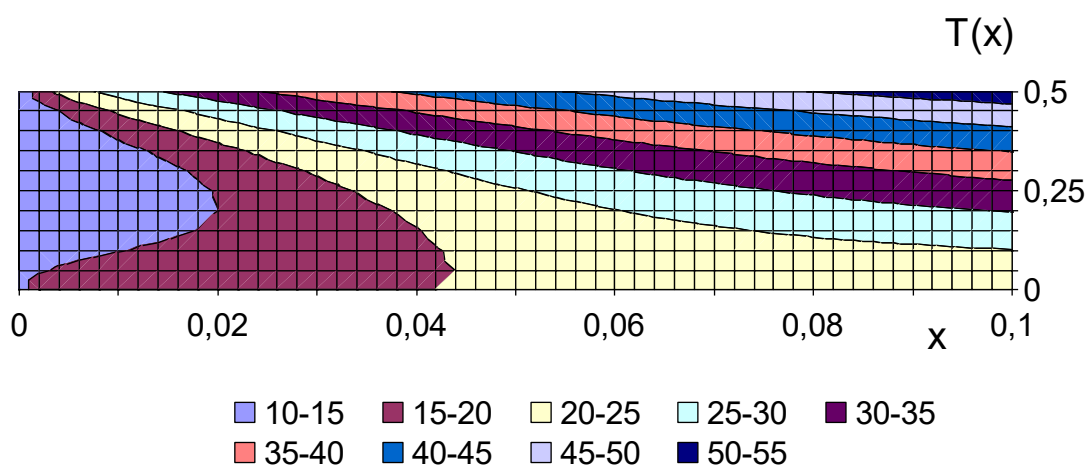


Рис. 3. Графики изменения температуры в отдельно взятых узлах



расчета по времени.  $T_0(x) = 10.0$ ,  $\mu_0(t) = 20.0$ ,  $f(x, t) = 0.0$ ,  
 $q_l(x) = 200.0$ ,  $N = 9$ ,  $\alpha = 2.0$

При  $l = 0.5$  и  $\alpha = 2.5$  имело место условие  $\alpha l = 1.25 (> 1)$ . Найденные для  $N + 1 = 10$  значения собственных чисел, при ограничении первыми четырьмя разрядами после десятичной запятой, составили  $-4.0078$ ,  $-3.8071$ ,  $-3.4392$ ,  $-2.9329$ ,  $-2.3378$ ,  $-1.7120$ ,  $-1.1168$ ,  $-0.6103$ ,  $-0.2419$ ,  $-0.0443$ .

Полученные при этом элементы матрицы  $V^{-1}$  представлены в табл. 3.

Таблица 3

Элементы матрицы  $V^{-1}$  при  $N = 9$  и  $\alpha = 2.5$

0,0528	-0,106	0,16	-0,2152	0,2722	-0,3313	0,393	-0,4577	0,5261	-0,2993
0,2023	-0,3656	0,4583	-0,4627	0,3777	-0,2199	0,0196	0,1844	-0,3529	0,2266
0,3214	-0,4626	0,3443	-0,0329	-0,2969	0,4602	-0,3655	0,0657	0,2709	-0,2278
-0,4072	0,3799	0,0528	-0,4292	0,3476	0,1049	-0,4454	0,3106	0,1556	-0,2279
0,4526	-0,1529	-0,4009	0,2883	0,3036	-0,3908	-0,1716	0,4488	0,02	-0,2278
-0,4534	-0,1306	0,4158	0,2504	-0,3437	-0,3494	0,2431	0,4194	-0,1223	-0,2273
0,41	0,3621	-0,0902	-0,4418	-0,3	0,1768	0,4562	0,2261	-0,2565	-0,2263
-0,3269	-0,4543	-0,3044	0,0313	0,3479	0,4522	0,2805	-0,0624	-0,3672	-0,2239
-0,2133	-0,3751	-0,4461	-0,4093	-0,2734	-0,0714	0,1478	0,3313	0,4347	0,2165
-0,0866	-0,1694	-0,2446	-0,309	-0,3598	-0,3945	-0,4118	-0,4109	-0,3917	-0,1776

Здесь по строкам расположены элементы одного собственного вектора.

Элементы матрицы  $V$ , найденные методом Гаусса с выбором главного элемента, представлены в следующей таблице.

Таблица 4

Элементы матрицы  $V$  при  $N = 9$  и  $\alpha = 2.5$

0,0484	0,1924	0,3056	-0,3871	0,4302	-0,4312	0,39	-0,3113	-0,2038	-0,084
-0,0972	-0,3477	-0,4398	0,3611	-0,1453	-0,1242	0,3445	-0,4326	-0,3583	-0,1642

0,1468	0,436	0,3273	0,0502	-0,3812	0,3954	-0,0858	-0,2899	-0,4262	-0,2371
-0,1975	-0,4401	-0,0313	-0,408	0,2741	0,2381	-0,4202	0,0298	-0,3909	-0,2996
0,2498	0,3593	-0,2822	0,3304	0,2886	-0,3268	-0,2854	0,3313	-0,2612	-0,3488
-0,304	-0,2091	0,4375	0,0997	-0,3715	-0,3322	0,1682	0,4306	-0,0682	-0,3825
0,3607	0,0187	-0,3474	-0,4234	-0,1631	0,2311	0,4339	0,2671	0,1412	-0,3992
-0,4201	0,1754	0,0625	0,2953	0,4266	0,3988	0,2151	-0,0594	0,3165	-0,3983
0,4828	-0,3356	0,2575	0,148	0,019	-0,1163	-0,244	-0,3497	0,4152	-0,3797
-0,5493	0,4311	-0,4331	-0,4333	-0,433	-0,4323	-0,4306	-0,4265	0,4135	-0,3443

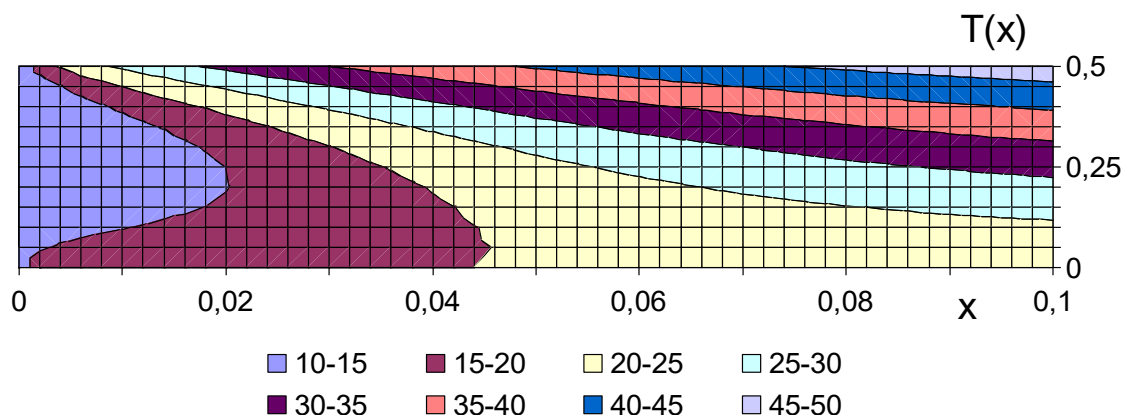


Рис. 4. Графики изменения температуры в отдельно взятых узлах

расчета по времени.  $T_0(x) = 10.0$ ,  $\mu_0(t) = 20.0$ ,  $f(x, t) = 0.0$ ,

$$q_l(x) = 200.0, N = 9, \alpha = 2.5$$

Сравнение двух рисунков показывает, что при меньшем значении  $\alpha$  (рис. 3) на границе  $x = l$  температура возрастает быстрее.

Таким образом, в рамках данной работы демонстрировали особенности дифференциально-разностного метода решения параболического уравнения. Основным успехом работы является то, что аналитическим путем определили собственные числа и векторы матрицы перехода  $A$  для граничных условий первого и третьего родов при  $x = 0$  и  $x = l$  соответственно. Их можно использовать при решении одно- и многомерных задач теплопередачи, фильтрации, теории упругости и др.

## REFERENCES

1. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

3. Каримбердиева С. Численные методы решения дифференциально-разностных уравнений в параллелепипеде, шаре и цилиндре. – Ташкент: Фан, 1983. – 112 с.
4. Фаддеева В.Н. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. – Тр. МИ АН СССР, 1949, том 28. – С. 73–103. (Из Общероссийского математического портала Math–Net).
5. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре (изд. 4–е дополн.). – М.: Наука, 1971. – 272 с.
7. Будаков Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. – М.: Наука, 1972. – 688 с.
8. Khujaev, J Khujaev, M Eshmurodov and K Shaimov. Differential-difference method to solve problems of hydrodynamics. Journal of Physics: Conference Series 1333. 2019. -P. 1-8.
9. Khujaev I, Khujaev J. Modification of the method of lines for solving one-dimensional equation of parabolic type under the boundary conditions of second and first genera // International Scientific Journal: Theoretical & Applied Science, Philadelphia, USA. – 2018. – Vol. 58. – Issue 2. – Pp. 144-153. – DOI: <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.02.58.31>.
10. Хужаев И.К., Хужаев Ж.И., Равшанов З.Н. Численно-аналитические методы решения задач на собственные числа и вектора для метода прямых на прямоугольных областях // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №4(10). – С. 76-83.

