НОСТАЦИОНАР ИССИҚЛИК УЗАТИШНИНГ ИККИ ЎЛЧОВЛИ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШ УЧУН ДИФФЕРЕНЦИАЛ-АЙИРМАЛИ УСУЛ

Масъуджон Хикматиллаевич Эшмуродов
Самарқанд давлат архитектура-қурилиш университети, 140147, Самарқанд
ORCID ID: https://orcid.org/0009-0005-0667-8116
m.eshmurodov@samdaqu.edu.uz

АННОТАЦИЯ

Тўғри ва тескари қувиш (прогонки) жараёнлари алоҳида йўналишларда амалга ошириладиган усулларнинг умумий камчиликлари турли йўналишларда натижаларнинг номувофиқлигидир. Ҳақиқатан ҳам, маълум бир йўналишда (координата ўқида) тенгламаларни аппроксимациялаганда изланаётган қўшни қатламларнинг қийматлари олдинги яқинлашишдан ёки вақт қатламидан олинади. Шу муносабат билан, предикор-корректор усулидан фойдаланган ҳолда ҳам вақт қадами учун якуний ечим аниқ ечим эмас, балки унга қандайдир яқинлашишувчи ечим олинади. Буларга чекли айирмали яқинлашувнинг номувофиқлигига қўшни қатламларда изланаётган қийматларнинг тақрибий қийматларидан фойдаланиш сабабли пайдо бўладиган ноаниқликлар қўшилади.

Калит сўзлар: Аппроксимация, Чекли айирмалар усули, Иссиқлик узатиш, Ностационар, Дифференциал-айирмали усул.

КИРИШ

Изланаётган функциянинг қийматлари биринчи Декарт координатаси чегараларида (биринчи жинсли чегаравий шартлари) ва иккинчи координата чегараларида биринчи, иккинчи ва учинчи жинсли шартларнинг ихтиёрий комбинациясида берилганда икки ўлчовли параболик тенгламаларни ечишнинг сонли усулини таклиф қиламиз. Бу усул алоҳида координаталар бўйича қувиш натижаларининг изчиллигини таъминлайди. Биз параболик тенгламани кўриб чиқиш билан чекланамиз.

МЕТОДОЛОГИЯ

Масаланинг қўйилиши. Икки ўлчовли иссиқлик узатиш жараёни

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{1}$$

тенглама билан тавсифланади, бу ерда $f(x,y,t)$ – иссиқлик сиғими ва материал зичлиги кўпайтмаси бўйича келтирилган (x,y) нуқтадаги ички ва ташқи иссиқлик манбаларининг интенсивлиги.

Ҳисоблаш соҳасида бошланғич ҳарорат тақсимоти

$$T\left(x,y,0\right)=T^{0}\left(x,y\right), \tag{2}$$

x ўқи учун

$$T\left(0,y,t\right)=\mu_{0}\left(y,t\right),\quad T\left(l_{x},y,t\right)=\mu_{l}\left(y,t\right) \tag{3}$$

ва y ўқи учун

$$\theta_{0}\frac{\partial T\left(x,0,t\right)}{\partial y}+\eta_{0}T\left(x,0,t\right)=\varphi\left(x,t\right),\ \ \theta_{l}\frac{\partial T\left(x,l_{y},t\right)}{\partial y}+\eta_{l}T\left(x,l_{y},t\right)=\psi\left(x,t\right) \tag{4}$$

чегаравий шартлар берилган.

Икки координата йўналиши бўйича ечимларнинг ўзаро мослигини таъминлайдиган сонли усулни ишлаб чиқиш талаб этилади.

Масалани ечишнинг дифференциал-айирмали усули. x ва y бўйича текис тўр:

$$\omega_{x}=\left(x_{i}=ih_{x},\ \ i=0,...,N_{x}+1;\ \ h_{x}=\frac{l_{x}}{N_{x}+1}\right),$$

$$\omega_{y}=\left(y_{j}=jh_{y},\ \ j=0,...,N_{y}+1;\ \ h_{y}=\frac{l_{y}}{N_{y}+1}\right),$$

шунингдек, вақт бўйича текис ёки нотекис қадам $\tau_{n}=t_{n}-t_{n-1}$ киритилади. Изланаётган $u_{i,j}^{n}$ тўр функцияси ва $f_{i,j}^{n}$, $\mu_{0,j}^{n}$, $\mu_{l,j}^{n}$... функцияларини киритамиз.

Дастлаб j $(0<j<N_{y}+1)$ нинг муайян қиймати учун x функция бўйича ички тугунларда тенгламани иккинчи тартибли аниқлик билан яқинлаштирамиз:

$$\frac{\partial u_{i,j}^{n}}{\partial t}=\frac{a^{2}}{h_{x}^{2}}\left(u_{i+1,j}^{n}-2u_{i,j}^{n}+u_{i-1,j}^{n}\right)+a^{2}\frac{\partial^{2}u_{i,j}^{n}}{\partial y^{2}}+f_{i,j}^{n}.$$

$i=1$ ва $i=N_{x}$ хусусий ҳолларда масаланинг чегаравий шартлари амалга оширилади:

$$\frac{\partial u_{1,j}^{n}}{\partial t}=\frac{a^{2}}{h_{x}^{2}}\left(u_{2,j}^{n}-2u_{1,j}^{n}+\mu_{0,j}^{n}\right)+a^{2}\frac{\partial^{2}u_{1,j}^{n}}{\partial y^{2}}+f_{1,j}^{n},$$

$$\frac{\partial u_{N_{x},j}^{n}}{\partial t}=\frac{a^{2}}{h_{x}^{2}}\left(\mu_{l,j}^{n}-2u_{N_{x},j}^{n}+u_{N_{x}-1,j}^{n}\right)+a^{2}\frac{\partial^{2}u_{N_{x},j}^{n}}{\partial y^{2}}+f_{N_{x},j}^{n}$$

Биз охирги учта ёзувни матрица шаклида ёзамиз:

$$\frac{\partial U_{j}^{n}}{\partial t}=\frac{a^{2}}{h_{x}^{2}}AU_{j}^{n}+a^{2}\frac{\partial^{2}U_{j}^{n}}{\partial y^{2}}+F_{j}^{n}, \tag{5}$$

Бу ерда

$$A=\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ & \dots & & & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2\end{matrix}\right\|_{N_x},$$

$$U_j^n=\left(u_{1,j}^n,\, u_{2,j}^n,\dots,\, u_{N_x-1,j}^n,\; u_{N_x,j}^n\right)^T,$$

$$F_j^n=\left(f_{1,j}^n+\frac{a^2}{h_x^2}\mu_{0,j}^n,\; f_{2,j}^n,\dots,\; f_{N_x-1,j}^n,\; f_{N_x,j}^n+\frac{a^2}{h_x^2}\mu_{l,j}^n\right)^T.$$

Бу ерда ва кейин $(\dots)^T$ матрицанинг транспонирлашни билдиради.

Биз A матрицасини $A=V\Lambda V^{-1}$ шаклда ифодалаймиз, бу ерда Λ диагонал матрицанинг элементлари $\lambda_s=-2\left(1+\cos\dfrac{\pi s}{N_x+1}\right)$, V фундаментал матрица элементлари эса $v_{s,p}=(-1)^{s+p}\sqrt{\dfrac{2}{N_x+1}}\sin\dfrac{\pi sp}{N_x+1}$ кўринишга эга; V^{-1} $(=V)$ – V га тескари матрица.

(4.5) тенгламанинг иккала томонини чапдан V^{-1} га кўпайтирамиз,

$$\frac{\partial V^{-1}U_j^n}{\partial t}=\frac{a^2}{h_x^2}V^{-1}AU_j^n+a^2\frac{\partial^2 V^{-1}U_j^n}{\partial y^2}+V^{-1}F_j^n \qquad (6)$$

Янги изланаётган $\bar{U}_j^n=V^{-1}U_j^n$ вектор функцияни, $\bar{F}_j^n=V^{-1}F_j^n$ вектор функциясини киритамиз ва $V^{-1}AU_j^n=\Lambda\bar{U}_j^n$ айниятни ҳисобга оламиз.

У ҳолда (4.6) тенглама қуйидаги шаклни олади:

$$\frac{\partial\bar{U}_j^n}{\partial t}=\frac{a^2}{h_x^2}\Lambda\bar{U}_j^n+a^2\frac{\partial^2\bar{U}_j^n}{\partial y^2}+\bar{F}_j^n,$$

бу эса

$$\frac{\partial\bar{u}_{i,j}^n}{\partial t}=\frac{a^2}{h_x^2}\lambda_i\bar{u}_{i,j}^n+a^2\frac{\partial^2\bar{u}_{i,j}^n}{\partial y^2}+\bar{f}_{i,j}^n \qquad (7)$$

автоном тенгламалардан иборатдир.

Киритилган алмаштиришлар ва $V^{-1}=V$ айниятга кўра, бу ерда

$$\bar{u}_{i,j}^{n}=\sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}u_{p,j}^{n}\,,\quad \bar{f}_{i,j}^{n}=v_{i,1}\frac{a^2\mu_{0,j}^{n}}{h_x^2}+v_{i,N_x}\frac{a^2\mu_{l,j}^{n}}{h_x^2}+\sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}u_{p,j}^{n}.$$

Шунинг учун бошланғич шарт $\bar{u}_{i,j}^{0}=\sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}T_{p,j}^{0}$ ва чегаравий шартлар

$\theta_0\dfrac{\partial \bar{u}_{i,0}^{n}}{\partial y}+\eta_0\bar{u}_{i,0}^{n}=\bar{\varphi}_i^n\equiv\sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}\varphi_p^n,\ \ \theta_l\dfrac{\partial \bar{u}_{i,N_y+1}^{n}}{\partial y}+\eta_l\bar{u}_{i,N_y+1}^{n}=\bar{\psi}_i^n\equiv\sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}\psi_p^n$ кўринишга эга.

j бўйича ички тугунлар учун (7) тенглама иккинчи тартибили ошкормас схема бўйича аппроксимацияланади:

$$\frac{\bar{u}_{i,j}^{n}-\bar{u}_{i,j}^{n-1}}{\tau_n}=\frac{a^2}{h_x^2}\lambda_i\bar{u}_{i,j}^{n}+\frac{a^2}{h_y^2}\left(\bar{u}_{i,j+1}^{n}-2\bar{u}_{i,j}^{n}+\bar{u}_{i,j-1}^{n}\right)+\bar{f}_{i,j}^{n}\ .$$

Тенгламанинг томонларини τ_n га кўпайтирамиз ва ихчамлаймиз:

$$a_j\bar{u}_{i,j+1}^{n}-b_j\bar{u}_{i,j}^{n}+c_j\bar{u}_{i,j-1}^{n}=d_j\,,$$

бу ерда $a_j=c_j=\sigma_y=\dfrac{\tau_n a^2}{h_y^2}$, $\sigma_x=\dfrac{\tau_n a^2}{h_x^2}$, $b_j=1+2\sigma_y-\sigma_x\lambda_i$, $d_j=-\tau_n\bar{f}_{i,j}^{n}-\bar{u}_{i,j}^{n-1}$,

$\bar{u}_{i,j-1}^{n}=\alpha_{j-1}\bar{u}_{i,j}^{n}+\beta_{j-1}$ деб фараз қилсак, $a_j\bar{u}_{i,j+1}^{n}-\left(b_j-c_j\alpha_{j-1}\right)\bar{u}_{i,j}^{n}=d_j-c_j\beta_{j-1}$ га эга бўламиз. Бу ердан $1\le j\le N_y$ лар учун қувиш коэффициентларининг қийматларини топамиз:

$$\alpha_j=\frac{a_j}{b_j-c_j\alpha_{j-1}},\quad \beta_{j-1}=\frac{c_j\beta_{j-1}-d_j}{b_j-c_j\alpha_{j-1}}. \tag{8}$$

$y=0$ да тўғри қувиш бошланадиган коэффициентларнинг қийматларини аниқлашимиз лозим. $y=0$ да учинчи жинсли чегаравий шартлар учун ($\theta_0\neq 0,\ \eta_0\neq 0$) аппроксимация аниқлигининг иккинчи тартибини ҳам таъминлаймиз:

$$\theta_0\frac{-3\bar{u}_{i,0}^{n}+4\bar{u}_{i,1}^{n}-\bar{u}_{i,2}^{n}}{2h_y}+\eta_0\bar{u}_{i,0}^{n}=\bar{\varphi}_i^n$$

$\bar{u}_{i,2}^{n}$ қийматни $a_1\bar{u}_{i,2}^{n}-b_1\bar{u}_{i,1}^{n}+c_1\bar{u}_{i,0}^{n}=d_1$ тенгликдан топамиз:

$$\bar{u}_{i,2}^{n}=\frac{d_1+b_1\bar{u}_{i,1}^{n}-c_1\bar{u}_{i,0}^{n}}{a_1}.$$

Уни олдинги тенгламага қўямиз ва

$$\left(-3\theta_0 a_1+\theta_0 c_1+2h_y a_1\eta_0\right)\bar{u}_{i,0}^n+\theta_0\left(4a_1-b_1\right)\bar{u}_{i,1}^n=\theta_0 d_1+2a_1 h_y\bar{\varphi}_i^n$$

тенгламани оламиз. Бундан

$$\alpha_0=\frac{\left(4a_1-b_1\right)\theta_0}{\left(3a_1-c_1\right)\theta_0-2h_y a_1\eta_0},\quad \beta_0=\frac{-\theta_0 d_1-2a_1 h_y\bar{\varphi}_i^n}{\left(3a_1-c_1\right)\theta_0-2h_y a_1\eta_0} \tag{9}$$

келиб чиқади.

Хусусий ҳолда, биринчи турдаги чегаравий шартлар ($\theta_0=0,\ \eta_0=1$) учун $\alpha_0=0,\ \ \beta_0=\bar{\varphi}_i^n$ га эга бўламиз.

Иккинчи турдаги чегаравий шартлар учун ($\theta_0=1,\ \eta_0=0$) умумий ҳолдан қуйидагилар келиб чиқади: $\alpha_0=\dfrac{4a_1-b_1}{3a_1-c_1},\quad \beta_0=\dfrac{-d_1-2a_1h_y\bar{\varphi}_i^n}{3a_1-c_1}.$

α_0 ва β_0 қийматлар (4.9) формулалар билан аниқлангандан сўнг $1\le j\le N_y$ лар учун $\alpha_j,\ \beta_j$ лар (4.8) формулалар бўйича ҳисобланади. олинган $\alpha_j,\ \beta_j$ ва чегаравий шартларга кўра $\bar{u}_{i,N_y+1}^n$ қийматлар аниқланади.

$y=l_y$ даги учинчи жинсли шарт $\theta_l=1,\ \eta_l\ne 0$ даги (4.4) даги иккинчи шарт ҳам аниқликнинг иккинчи тартиби билан аппроксимацияланади:

$$\frac{\theta_l}{2h_y}\left(3\bar{u}_{i,N_y+1}^n-4\bar{u}_{i,N_y}^n+\bar{u}_{i,N_y-1}^n\right)+\eta_l\bar{u}_{i,N_y+1}^n=\bar{\psi}_i^n\ .$$

Бу ерда $\bar{u}_{i,N_y-1}^n=\alpha_{N_y-1}\bar{u}_{i,N_y}^n+\beta_{N_y-1}$. Шунинг учун

$$\left(3\theta_l+2h_y\eta_l\right)\bar{u}_{i,N_y+1}^n-\left(4\theta_l-\theta_l\alpha_{N_y-1}\right)\bar{u}_{i,N_y}^n=2h_y\bar{\psi}_i^n-\theta_l\beta_{N_y-1}.$$

$\bar{u}_{i,N_y}^n=\alpha_{N_y}\bar{u}_{i,N_y+1}^n+\beta_{N_y}$ ни ҳисобга оламиз. У ҳолда

$$\left[3\theta_l+2h_y\eta_l-\theta_l\left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\alpha_{N_y}\right]\bar{u}_{i,N_y+1}^n=2h_y\bar{\psi}_i^n-\theta_l\beta_{N_y-1}+\theta_l\left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\beta_{N_y}.$$

Бундан

$$\bar{u}_{i,N_y+1}^n=\frac{2h_y\bar{\psi}_i^n-\theta_l\left[\beta_{N_y-1}-\left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\beta_{N_y}\right]}{2h_y\eta_l+\theta_l\left[3-\left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\alpha_{N_y}\right]}$$

тенглик келиб чиқади. Бу формуладан $\theta_l=0,\ \eta_l=1$ да $y=l_y$ даги биринчи жинсли чегаравий шартлар учун $\bar{u}_{i,N_y+1}^n=\bar{\psi}_i^n$ оддий формула ҳосил бўлади.

Иккинчи жинсли чегаравий шартлар учун эса $\theta_l = 1,\ \eta_l = 0$ да

$$\bar{u}^n_{i,N_y+1} = \frac{2h_y\bar{\psi}^n_i - \left[\beta_{N_y-1} - \left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\beta_{N_y}\right]}{3-\left(4-\alpha_{N_y-1}\right)\alpha_{N_y}}.$$

тенгликка эга бўламиз.

$i = 1..N_x$ кесимлар учун тўғри ва тескари қувиш амалга оширилади.

$V = V^{-1}$ айният ҳисобга олинган ҳолда u^n_i га тескари ўтиш $i = 1..N_x$ ва $j = 0..N_y + 1$ да $u^n_{i,j} = \sum_{p=1}^{N_x} v_{i,p}\bar{u}^n_{p,j}$ формула бўйича амалга оширилади.

Биз таклиф қилган усул доирасида ечиладиган алоҳида масалаларга мурожаат қиламиз ва сонли натижаларни муҳокама қиламиз.

Тенглама ва чегаравий шартларни яқинлаштирганда координаталар бўйича $O\left(h_x^2 + h_y^2\right)$ иккинчи тартибли аниқликни таъминладик. Тақдим этилган материал вақт бўйича $O\left(\max_n\{\tau_n\}\right)$ аниқликнинг биринчи тартибини таъминлайди. Лекин чекли-айирмали тенгламанинг (7) ўнг томонини вақт бўйича n -инчи ва n-1-чи қадамлари учун ифодаларнинг ўрта арифметик қиймати билан ифодалаш орқали унинг тартибини ошириш имконияти мавжуд.

ХУЛОСА

Параболик тенгламани сонли ечиш учун таклиф қилинган усулнинг муваффақияти шундан иборатки, муайян t вақтда x координата бўйлаб ҳам, y координата бўйлаб ҳам аппроксимациялашда тўр функциялари ёки уларнинг чизиқли комбинацияларининг бир хил қийматларидан фойдаландик. Яъни, вақт ўтиши билан тўпланиб қоладиган қўшни қатламлардаги чекли айирмали тенгламаларида қўлланиладиган тўр функцияларнинг номувофиқлигидан келиб чиқадиган хатоликлар бартараф этилди. Охир оқибат, ҳисоб-китобларнинг аниқлиги яқинлашишнинг $O\left(\tau_{n\max} + h_x^2 + h_y^2\right)$ ва машина яхлитлашларининг аниқлиги билан баҳоланади. Қадамларнинг қийматлари бошланғич ва чегаравий шартларнинг табиатига қараб танланади.

τ_n вақт қадамининг ўзгарувчанлиги ўрнатилиш жараёнида τ_n ни арифметик прогрессия ёки бошқа шаклда олиниши билан боғлиқ. Бунинг ўрнига $\partial T / \partial t = 0$ деб қабул қилиш орқали эллиптик тенгламага ўтиш мумкин. Агар тенгламанинг ўнг томони ва чегаравий функциялари вақтга боғлиқ бўлмаса, у ҳолда юқорида келтирилган материалга асосланиб алгоритм қуриш мумкин, у ҳолда масала кетма-кет яқинлашишларни ишлатмасдан ёки фиктив вақтни киритмасдан бир босқичда ечилади. Агар тенгламанинг ўнг томони ва чегаравий функциялари вақтга боғлиқ бўлса, у ҳолда t вақт параметр сифатида ечимда иштирок этади ва ҳар бир алоҳида t_n қийматлар учун дифференциал-айирмали усулни қўллаш якуний натижани беради.

Алгоритм гиперболик типдаги тенгламалар учун мос тузатишлар билан мослаштирилиши мумкин. Бундай ҳолда, машинани яхлитлаш чегараларидаги $O\left(\tau_{n\max}+h_x^2+h_y^2\right)$ аниқлик таъминланади.

Агар x координата бўйича шартлардан бирини иккинчи турдаги шарт билан алмаштирилса, ечиладиган масалалар доирасини кенгайтириш мумкин. Бундай ҳоллар учун λ_s, $v_{s,p}$, $\bar{v}_{s,p}$ лар қийматлари келтирилган.

REFERENCES

1. I. Khujaev, J Khujaev, M Eshmurodov and K Shaimov. Differential-difference method to solve problems of hydrodynamics. Journal of Physics: Conference Series 1333. 2019. -P. 1-8.
2. M Kh Eshmurodov, K M Shaimov, I Khujaev and J Khujaev. Method of lines for solving linear equations of mathematical physics with the third and first types boundary conditions//Journal of Physics: Conference Series 2131, 2021. -P.1-10.
3. KM Shaimov, MK Eshmurodov, I Khujaev, ZI Khujayev. The method of lines for solving equations of mathematical physics with boundary conditions of the first and third types//*AIP Conference Proceedings* 2612, 030028 (2023). https://doi.org/10.1063/5.0124614
4. КМ Шаимов, МХ Эшмуродов, ИК Хужаев. Численный метод решения задач о движущихся точечных источниках тепла внутри области теплообмена//ТУИТ имени М.ал-Хоразми – Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2020.-№1(25).-С. 59-68.
5. M.X. Eshmurodov, K.M. Shaimov. Ixtiyoriy chiziqli chegaraviy shartlar uchun parabolik tenglamani yechishda to‘g‘ri chiziqlar usulini qo‘llash algoritmi//Academic Research in Educational Sciences Volume 3 | Issue 11 | 2022. B. 124-133.
6. M.X. Eshmurodov. To‘g‘ri burchakli sohada issiqlik to‘lqinlari tarqalishi masalani yechish. Academic Research in Educational Sciences Volume 4 | Issue 1 | 2023. B. 111-115.
7. M.X. Eshmurodov. Yordamchi matrisalarni kiritish va ularning elementlarini aniqlash usullari. Academic Research in Educational Sciences Volume 4 | Issue 1 | 2023. B. 209- 214.