АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, СОДЕРЖАЩЕЙ СЛАБУЮ НЕЛИНЕЙНОСТЬ

М. М. Сайдаматов
Университет геологических наук

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается система дифференциальных уравнений в частных производных с малыми параметрами ε, μ при старших производных. При некоторых условиях на коэффициенты, доказано существование 2π-периодического по t решение и построено асимптотическое разложение решение задачи.

Ключевые слова: асимтотическое разложение, пограничные функции, малый параметр, остаточный член.

ABSTRACT

The article considers a system of partial differential equations with small parameters ε, μ at higher derivatives. Under certain conditions on the coefficients, the existence of a 2π-periodic solution in t is proved and an asymptotic expansion of the solution to the problem is constructed.

Keywords: asymptotic expansion, boundary conditions, small parameter

ВВЕДЕНИЕ

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций для сингулярно-возмущенных систем уравнений имеющий слабую нелинейность [1]. Понятие асимптотического разложения функции и асимптотического ряда были введены Анри Пуанкаре при разрешении задач небесной механики. Отдельные случаи асимптотического разложения были открыты и применялись ещё в XVIII в. Асимптотические разложения и ряды играют важную роль в различных задачах математики, механики и физики.

Рассмотрим гиперболическую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^2\mu^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=\dfrac{\partial z}{\partial t}-y \\ \varepsilon^2\mu^2\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=\dfrac{\partial y}{\partial t}+z-\mu^2(1-z^2)y+\mu^2\alpha(x)\cos t \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь $x\in[0,\ell], z, y-$неизвестные скалярные функции, $\varepsilon,\mu-$два малых положительных параметра, $\alpha(x)-$непрерывно дифференцируемая функция.

Зададим для решений $z=z(x,t,\varepsilon,\mu), y=y(x,t,\varepsilon,\mu)$ системы (1) граничные при $x=0, x=\ell$ условия

$$z|_{x=0}=z|_{x=\ell}=y|_{x=0}=y|_{x=\ell}=0 \qquad (2)$$

Будем искать 2π - периодическое по t решение задачи (1), (2).

При $\mu=0$ или $\varepsilon=0$ система (1) вырождается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, следовательно, для определения решения вырожденной системы требуются не все дополнительные условия, заданные для системы (1), а лишь их часть-условие периодичности по t . Для задачи (1), (2) реализуется критический случай.

В этой задаче будет построена асимптотика периодического решения по невязке.

Вырожденная система имеет семейства 2π-периодических решений, а период малой вынуждающей силы также равна 2π. Наличие нелинейности обеспечивает существование решения возмущенной ($\mu\neq 0$) системы, период которого также равен 2π.

Формальное 2π - периодическое по t решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(x,t,\varepsilon,\mu)=\bar{u}(x,t,\varepsilon,\mu)+\prod u(\xi,t,\varepsilon,\mu)+Qu(\eta,t,\varepsilon,\mu)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k[\bar{u}_k(x,t,\varepsilon)+\prod\nolimits_k u(\xi,t,\varepsilon)+Q_k u(\eta,t,\varepsilon)] \qquad (3)$$

Здесь $\xi=\dfrac{x}{\varepsilon\mu}, \eta=\dfrac{(\ell-x)}{\varepsilon\mu}$.

В (3) и в дальнейшем под u понимается z и y в совокупности, т.е. если выписывается некоторое соотношение для u, то это значит, что имеют место два в точности такие же соотношения для z и y .

Регулярные члены $\overline{u_k}(k=0,1,2...)$ определяются [1] путем формальной подстановки в систему (1) ряда

$$\overline{u}(x,t,\varepsilon,\mu)=\sum\mu^k\,\overline{u}_k(x,t,\varepsilon)$$

и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ, тогда для $\overline{z}_k$, $\overline{y}_k$ получается система

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{z}_k}{\partial t}=\overline{y}_k+\varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2\overline{z}_{k-2}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\overline{z}_{k-2}}{\partial t^2}\right)\\ \dfrac{\partial\overline{y}_k}{\partial t}=-\overline{z}_k+\varepsilon^2\left(\dfrac{\partial^2\overline{y}_{k-2}}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\overline{y}_{k-2}}{\partial t^2}\right)+(1-\overline{z}_0^{\,2})\overline{y}_{k-2}-2\overline{z}_0\,\overline{y}_0\,\overline{z}_{k-2}+N_k\end{cases}\qquad(\mu^k)$$

Здесь через N_k обозначена некоторая функция, зависящая известным образом от $\overline{z}_j$, $\overline{y}_j$, $j=0,1,\ldots$ $j<k$.. Нетрудно видеть, что все системы (μ^k) однотипны: они представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их решения определяются лишь условием периодичности по t.

Для построения функции пограничного слоя соответственно в окрестностях $x=0$ и $x=\ell$

$$\Pi u(\xi,t,\varepsilon,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\,\Pi_k\,u(\xi,t,\varepsilon)\quad,\quad Qu(\eta,t,\varepsilon,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kQ_ku(\eta,t,\varepsilon)$$

будем применять стандартную процедуру теории сингулярных возмущений [1,2].

Тогда для определения $\Pi_k\,u(\xi,t,\varepsilon)$ получим систему вида

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\Pi_k\,z}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial\Pi_k\,z}{\partial t}-\Pi_k\,y+\delta(\xi,t,\varepsilon),\\ \dfrac{\partial^2\Pi_k\,y}{\partial\xi^2}=\dfrac{\partial\Pi_k\,y}{\partial t^2}+\Pi_k\,z+\sigma(\xi,t,\varepsilon)\end{cases}\qquad(\mu^k{}_{\Pi})$$

где

$$\delta(\xi,t,\varepsilon)=\begin{cases}0\,, & k=0,1,\\ \varepsilon^2\,\dfrac{\partial^2\Pi_{k-2}\,z}{\partial t^2}\,, & k=2,3,\ldots\end{cases},\quad \sigma(\xi,t,\varepsilon)=\begin{cases}0\,, & k=0,1\\ \varepsilon^2\,\dfrac{\partial^2\Pi_{k-2}\,y}{\partial t^2}-[1-(\Pi_0\,z)^2]\Pi_{k-2}\,y, & k=2,3,..\end{cases}$$

Функции $Q_ku(\eta,t,\varepsilon)$ определяется аналогичными системами.

Дополнительные условия для пограничных функций получим из граничных условий (2) $\Pi_k\,u(0,t,\varepsilon)=-u_k(0,t,\varepsilon)$. Кроме того, из свойства пограничных функции имеем $\Pi_k\,u(\xi,t,\varepsilon)\to0,\ \xi\to\infty.$ А из условия 2π-периодичности по t имеем

$$\overline{u}_k(x,t,\varepsilon)=\overline{u}_k(x,t+2\pi,\varepsilon),\qquad \Pi_k\,u(\xi,t,\varepsilon)=\Pi_k\,u(\xi,t+2\pi,\varepsilon)$$

Аналогичные дополнительные условия будут и для функций Q_ku.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теорема. При достаточно малых ε, система (1) с граничными условиями (2) имеет формальное 2π-периодическое по t решение $z(x,t,\varepsilon,\mu)$, $y(x,t,\varepsilon,\mu)$, представимое в виде рядов (3) и при постановке в систему (1) частичных сумм N-ого порядка ряда (3) равенство (1) оказывается справедливым с точностью до величин порядка $0(\mu^{N+2})$.

REFERENCES

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ. 1978.-106 с.
2. Васильева А.Б., Волков В.Т. О периодических решениях сингулярно возмущенных уравнений параболического типа. // Дифференциальные уравнения. 1985, т.21. № 10. с.1755-1760.
3. Сайдаматов М.М. Об одном критическом случае в задаче о периодическом решении сингулярно возмущенного уравнения гиперболического типа // Изв. АН УзР сер. Физ-мат. наук. 1986. № 5 с.19-23.